

Übungsblatt 3

für das Tutorium am 29.10.2015

1. Kosmischer Apfelschuss

Im 29. Jahrhundert ist das Schweizer Sonnensystem vom bösen Lord Gessler bedroht. Gessler entführt den Freiheitskämpfer Wilhelm Tell und seinen Sohn. Tell und sein Sohn werden in zwei Raketen R_1 und R_2 gefangen gehalten, die sich in Bezug auf ein Inertialsystem S mit Geschwindigkeiten vom Betrag $\frac{1}{2}$ auf parallelen geraden Bahnen in entgegengesetzte Richtungen bewegen (siehe Abbildung 1). Der Normalabstand der Bahnen sei d .

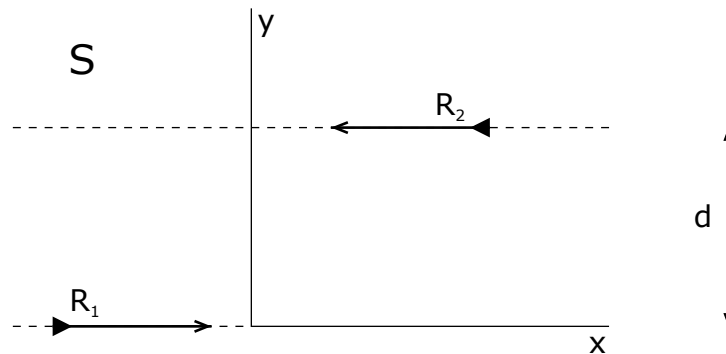


Figure 1: Zwei Raketen fliegen im Abstand d an einander vorbei.

Um die Freiheit zu erlangen muss Tell von Rakete R_1 aus mit einer Armbrust einen Apfel vom Kopf seines Sohnes in Rakete R_2 schießen. Der Pfeil fliegt an jenem Zeitpunkt in S los, an dem die Raketen einander in S passieren (nimm an, dass sie punktförmig sind). Im Ruhesystem S' von R_1 habe der Pfeil eine Geschwindigkeit vom Betrag

$$u' = \frac{\sqrt{79}}{10}. \quad (1)$$

- Unter welchem Winkel α' zur y' -Achse in S' muss der Pfeil abgeschossen werden, damit er bei Rakete R_2 ankommt?
- Bestimme die Geschwindigkeit des Pfeiles \vec{u}' in S' sowie die zugehörige Geschwindigkeit \vec{u} in S .
- Wie lange ist der Pfeil jeweils in S und S' vom Abschuss bis zum Zusammentreffen mit R_2 unterwegs?

2. 4-dimensionaler ϵ -Tensor

- (a) Wie viele von 0 verschiedene Elemente hat der total antisymmetrische Tensor vom Rang 4, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$?

Für sein dreidimensionales Analogon, ϵ_{ijk} , gilt bekanntermaßen, dass dieser sein Vorzeichen bei zyklischer Vertauschung seiner Indizes beibehält. Man mache sich klar, dass diese Regel für $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in dieser Allgemeinheit falsch ist.

Drücke $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$ durch $\delta_\mu^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu}$ aus.

- (b) Zeige, dass dieser Tensor unter Standard-Lorentztransformationen invariant ist, d.h. zeige, dass $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt, mit

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2)$$

Hinweis: Schreibe die rechte Seite dieser Gleichung als Determinante einer geeigneten Matrix.

3. Energie-Impuls-Tensor

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik ein dynamisches Feld $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Der Energie-Impulstensor folgt aus der Variation der Wirkung bzgl. der Metrik $g_{\mu\nu}$. Für die Maxwellwirkung ausgewertet im Minkowski-Raum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist er gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \left. \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \right|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = F^{\mu\rho} F^\nu_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3)$$

mit $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

- (a) Berechne $\partial_\nu T^{\mu\nu}$ und vereinfache mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen.
(b) Berechne die Spur von $T^{\mu\nu}$.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2b, 3ab