Übungsblatt 4

für das Tutorium am 5.11.2015

1. **Die Lorentzalgebra**

(a) Gegeben seien in D Raumzeitdimensionen die Lorentzgeneratoren

$$(L^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha \,, \tag{1}$$

die man als Kollektion von $D(D-1)/2$ antisymmetrischen Matrizen interpretieren kann, $L^{\mu\nu}$. Zeige durch explizite Rechnung, dass die Lorentzalgebra erfüllt ist.

Hinweis: Berechne den Kommutator $[L^{\kappa\lambda}, L^{\mu\nu}]^\alpha{}_\beta = (L^{\kappa\lambda})^\alpha{}_\gamma (L^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta - (L^{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma (L^{\kappa\lambda})^\gamma{}_\beta$.

(b) Gegeben seien $D(D-1)/2$ lineare homogene Differentialoperatoren erster Ordnung $l^{\mu\nu} = (x^\mu \eta^{\nu\lambda} - x^\nu \eta^{\mu\lambda})\partial_\lambda$. Zeige durch explizite Berechnung der Kommutatoren, dass diese Differentialoperatoren die Lorentzalgebra erfüllen. Identifiziere die Differentialoperatoren die Boosts entsprechen und auch diejenigen die Rotationen entsprechen.

Hinweis: Kommutatoren zwischen Differentialoperatoren $D_i = f_i^\lambda(x^\alpha)\partial_\lambda$ sind gegeben durch $[D_i, D_j] = f_i^\lambda(\partial_\lambda f_j^\kappa)\partial_\kappa - f_j^\lambda(\partial_\lambda f_i^\kappa)\partial_\kappa$, wobei i, j hier reine Zählindizes sind, während κ und λ Raumzeitindizes sind.

(c) Betrachte die Lorentzgeneratoren $L^{\mu\nu}$ im Spezialfall $D = 3 + 1$. Verwende die Definitionen $K_i := L_{0i}$ und $L_i := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} L^{jk}$ und berechne aus der Lorentzalgebra die Kommutatoren $[L_i, L_j], [L_i, K_j]$ und $[K_i, K_j]$. Wie läßt sich das Ergebnis für den letzten Kommutator physikalisch interpretieren?

Nimm dann die komplexen Kombinationen $L_j^\pm := L_j \pm iK_j$ und bestimme aus obigem Ergebnis die Kommutatoren $[L_i^\pm, L_j^\pm]$ und $[L_i^+, L_j^-]$.

(d) Wir bleiben in $D = 3+1$. Definiere die komplexe 2×2 Matrix $X := x^\mu \sigma_\mu$, wobei x^μ der 4er-Ortsvektor ist und $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sind komplexe 2x2 Matrizen, nämlich die Einheitsmatrix und die drei Paulimatrizen. Beweise das $\det X$ Lorentzinvariant ist und erläutere was die Fälle $\det X > 0$, $\det X = 0$ und $\det X < 0$ über den Ortsvektor x^μ aussagen.

Hinweis: die Paulimatrizen sind wie folgt definiert:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{2}$$

2. **Geschwindigkeit und Beschleunigung**
   Es sei u die Geschwindigkeit eines Teilchens entlang der x-Achse beobachtet in einem Bezugssystem S. Das System S' bewege sich in x-Richtung mit der Relativgeschwindigkeit v bzgl. S. Dann ist die in S' beobachtete Geschwindigkeit des Teilchens
   $$u' = \frac{u-v}{1-uv}\,. \tag{3}$$
   Dies ist das sogenannte Additionstheorem für relativistische Geschwindigkeiten.

   (a) Beweise diese Relation mit Hilfe von Lorentztransformationen.
   Hinweis: Vergleiche die direkte Transformation $S_0 \to S'$ aus dem Ruhsystem des Teilchens S_0 in das Bezugssystem S' mit dem Produkt zweier aufeinander folgender Transformationen $S_0 \to S \to S'$.

   (b) Ein Teilchen pralle mit einer Geschwindigkeit v auf ein ruhendes Target. Es gibt ein System S', in dem die Geschwindigkeiten von Teilchen und Target entgegengesetzt gleich groß sind, $\vec{v}'_{\text{Teilchen}} = -\vec{v}'_{\text{Target}}$. Benutze das Additionstheorem um v' zu berechnen. Wie groß ist v', wenn v durch einen Dilatationsfaktor $\gamma = 3$ gegeben ist?

   (c) Vierer-Geschwindigkeit u^μ und Vierer-Beschleunigung b^μ sind in einem Inertialsystem S definiert durch
   $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}\,, \qquad b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}\,, \tag{4}$$
   mit dem Eigenzeitdifferential $d\tau = \gamma^{-1}dt$ und Weltlinien $x^\mu = (t, \vec{x}(t))$. Drücke u^μ und b^μ durch die "gewöhnliche" Dreier-Geschwindigkeit und Dreier-Beschleu-nigung
   $$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}\,, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{5}$$
   aus und zeige insbesondere, dass, in einer räumlichen Dimension,
   $$b^\mu = \gamma^4\,(va, a)\;. \tag{6}$$

3. **Lagrange-Formalismus für nichtrelativistisches Teilchen**
   Zur Wiederholung des Lagrange-Formalismus: Die Lagrange-Funktion eines nichtrelativistischen Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem elektromagnetischen Feld ist
   $$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi(\vec{r},t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\,. \tag{7}$$

   (a) Zeige, dass die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf die aus der Elektrodynamik bekannte Bewegungsgleichung
   $$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{8}$$
   führt.

   (b) Gib die zugehörige Hamilton-Funktion und die Hamilton-Gleichungen an.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2abc, 3a, 3b