# Übungsblatt 5

für das Tutorium am 12.11.2015

1. **Energie-Impuls-Tensor**
   Der antisymmetrische Feldstärketensor kann durch ein Viererpotenzial geschrieben werden als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

   (a) Betrachte die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Unter infinitesimalen Translationen $x^\mu + \delta\epsilon^\mu$ hat man $\delta A^\mu = \delta\epsilon^\nu \partial_\nu A^\mu$. Zeige, dass der zugehörige Noetherstrom $J^\mu = -\delta\epsilon^\nu \Theta^\mu{}_\nu$ ist, wobei

   $$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^\nu A_\rho) F^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \,. \tag{1}$$

   (b) Der Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ ist nicht symmetrisch. Wir definieren einen neuen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ der symmetrisch in $\mu$ und $\nu$ ist. Die Erhaltung des Noetherstoms $J^\mu = -\delta\epsilon^\nu \Theta^\mu{}_\nu$ impliziert, dass $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$. Welche Bedingung muss $f^{\lambda\mu\nu}$ erfüllen, damit $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gilt? Bestimme $f^{\lambda\mu\nu}$, so dass $T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ gilt. (Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ enthält keine Quellen, so dass $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ist.)

   (c) Zeige, dass der Strom

   $$N^{\nu\kappa\lambda} = x^\kappa T^{\lambda\nu} - x^\lambda T^{\kappa\nu} \tag{2}$$

   erhalten ist, also dass $\partial_\nu N^{\nu\kappa\lambda} = 0$ ist.

   (d) Das Viererpotenzial transformiert unter Lorentztransformation wie folgt

   $$A^\mu(x^\mu) \to \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1} x) \,. \tag{3}$$

   Bestimme die zugehörige infinitesimal Lorentztransformation.

   (e) Wie verhält sich die Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ unter der Eichtransformation

   $$A^\mu(x^\mu) \to A^\mu(x^\mu) + \partial^\mu \lambda(x^\mu) \,, \tag{4}$$

   für eine beliebige reelle Funktion $\lambda(x^\mu)$?

2. **Erhaltener Strom und Energie-Impuls-Tensor**
   Es sei eine Lagrangedichte für ein komplexes Feld $\phi(x^\mu)$ gegeben durch

   $$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4$$

   mit $|\phi|^2 = \phi\phi^*$ und positiven Konstanten $m$ und $\lambda$.

   (a) Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\phi$ und $\phi^*$.
   *Hinweis:* Behandle $\phi$ und $\phi^*$ als unabhängige $\phi_1$ und $\phi_2$.

(b) Die Lagrangedichte ist invariant unter Transformationen der Form $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ ($\phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$) mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Lagrangedichte unter den entsprechenden infinitesimalen Transformationen invariant ist und bestimme den erhaltenen Noetherstrom $j^\mu$.

(c) Jetzt betrachten wir infinitesimale Translationen $x^\mu \to x^\mu + \delta\epsilon^\mu$ unter denen das komplexe Feld wie folgt transformiert

$$\delta\phi(x^\mu) = \delta\epsilon^\nu \partial_\nu \phi(x^\mu)\,, \qquad \delta\phi^*(x^\mu) = \delta\epsilon^\nu \partial_\nu \phi^*(x^\mu)\,. \tag{5}$$

Die Lagrangedichte ist invariant bis auf eine totale Ableitung $\delta\mathcal{L} = \delta\epsilon^\mu \partial_\nu K_\mu{}^\nu$. Bestimme den Noetherstrom $J^\mu = \delta\epsilon^\nu T^\mu{}_\nu$, wobei $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor ist.

(d) Zeige durch explizites Nachrechnen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass der Strom $j^\mu$ und der Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu}$ erhalten sind, d.h. dass $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gilt.

Ankreuzbar: 1ab, 1cde, 2ab, 2c, 2d