Übungsblatt 6

für das Tutorium am 19.11.2015

1. **Zwangsbedingungen**
   Betrachte ein Fadenpendel, das sich unter Einfluß der Schwerkraft in drei Dimensionen bewegt: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Wir nehmen an, dass das Pendel in der (x, y)-Ebene schwingt und der Faden die Länge l hat. Dies führt auf den Lagrangian

   $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy + \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) + \lambda_2 z\,, \tag{1}$$

   wobei $\lambda_i(t)$ zwei extra "Koordinaten" (Lagrangemultiplikatoren) sind, die die Zwangsbedingungen erzwingen.

   (a) Leite die fünf Euler-Lagrange Gleichung her. Benutze diese Euler-Lagrange Gleichungen und ihre Zeitableitungen, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen.

   (b) Berechne die kanonische Hamiltonfunktion und die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen.

   (c) Bestimme die Dimension des Kerns von $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j}$, die mit der Anzahl der primären Zwangsbedingungen übereinstimmt. Überprüfe die Konsistenz der primären Zwangsbedingungen mit der Zeitentwicklung.

   (d) Die Zeitentwicklung der Zwangsbedingungen führt zu weiteren Zwangsbedingungen. Bestimme λ_1 und λ_2, so dass die quartiären Zwangsbedingungen verschwinden.

2. **Proca-Gleichung**
   Wenn das Photon eine nichtverschwindende Ruhemasse m hätte, wäre die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes mit einer vorgegebenen divergenzfreien Quelldichte j_μ gegeben durch

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu\,. \tag{2}$$

   Zeige, dass in der Lorentzeichung, $\partial_\mu A^\mu = 0$, für diese Lagrangedichte die Euler-Lagrange-Gleichung auf die Bewegungsgleichung

   $$(\Box + m^2)A^\mu = 4\pi\, j^\mu \tag{3}$$

   führt.

3. **Yukawa-Potential**

Zeige, dass für den Fall des "massiven Photons" aus Aufgabe 2 das Potential einer im Ursprung ruhenden Punktladung q, also für $j^0 = q\,\delta(\vec{r})$, durch das *Yukawa-Potential*

$$A^0(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} e^{-mr} \tag{4}$$

gegeben ist.

Hinweis: Löse die Differentialgleichung für ϕ durch Fourier-Transformation und verwende

$$\int_0^\infty dk\, \frac{k \sin(kr)}{k^2 + m^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-mr}\,. \tag{5}$$

Ankreuzbar: 1a, 1b, 1cd, 2, 3