Übungsblatt 7

für das Tutorium am 26.11.2015

1. **Teilchenbahn in gekrümmtem Raum**
   Die Wirkung eines freien Teilchens mit Masse m in krummlinigen Koordinaten ist gegeben durch
   $$S = m \int ds\,,$$
   mit dem Wegelement $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ und einer beliebigen symmetrischen Metrik $g_{\mu\nu}(x)$. Durch Einführen eines beliebigen Bahnparameters u lässt sich die Wirkung durch eine Lagrangefunktion ausdrücken,
   $$m\,ds = L\,du\,, \qquad L = m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}\,, \tag{1}$$
   wobei der Punkt Ableitung nach u bedeutet.

   Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für L sich schreiben lassen als
   $$\ddot{x}^\rho + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^\rho\,, \tag{2}$$
   mit
   $$\Gamma^\rho_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})\,. \tag{3}$$
   Bemerkung: Mit $u = s$ verschwindet die rechte Seite von Glg. (2). Die resultierende Gleichung $\ddot{x}^\rho + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$ nennt man *Geodätengleichung*, die daraus resultierende Bahnkurve eines freien Teilchens in einem gekrümmten Raum *Geodäte*. Die in Glg. (3) definierten Größen nennt man *Christoffelsymbole*. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

2. **Hamiltonfunktion und Zwangsbedingungen**
   Betrachte den Lagrangian
   $$L(q_i, \dot{q}_i) = \epsilon_{ij} q^i \dot{q}^j \tag{4}$$
   mit $i, j = 1, 2$ und konstantem $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$.

   (a) Bestimme die kanonischen Impulse und die kanonische Hamiltonfunktion.

   (b) Bestimme alle primären und sekundären Zwangsbedingungen.

   (c) Bestimme für alle Zwangsbedingungen ob sie erster oder zweiter Klassse sind.

   (d) Bestimme die Dimension des physikalischen Phasenraums.

3. **Zwangsbedingungen erster und zweiter Klasse**
   Betrachte den Lagrangian
$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - V(q_1, q_2)\,. \tag{5}$$
   (a) Bestimme die kanonische Hamiltonfunktion, die primären Zwangsbedingung und die volle Hamiltonfunktion.
   (b) Bestimme alle Zwangsbedingungen und die Dimension des physikalischen Phasenraums.
   (c) Nimm an, dass $V(q_1, q_2) = V(q_1)$ nicht von q_2 abhängt. Bestimme alle Zwangsbedingungen und die Dimension des physikalischen Phasenraums.

4. **Das Fadenpendel**
   Letztes Mal haben wir den vollen Hamiltonian
$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgy - \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) - \lambda_2 z + u^1\Phi_1 + u^2\Phi_2\,, \tag{6}$$
   mit den primären Zwangsbedingungen $\Phi_1 = p_{\lambda_1}$ und $\Phi_2 = p_{\lambda_2}$ betrachtet.
   (a) Bestimme für alle acht Zwangsbedingungen ob sie erster oder zweiter Klassse sind.
   (b) Bestimme die Dimension des physikalischen Phasenraums.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2cd, 3abc, 4ab