# Übungsblatt 8

für das Tutorium am 03.12.2015

1. **Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen**
Unter der Annahme der Existenz von magnetischen Monopolen haben die Maxwellgleichungen folgende Form:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_e && (1)\\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \rho_m && (2)\\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m\right) && (3)\\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_e\right), && (4)
\end{aligned}$$

wobei $j_e^\mu = (\rho_e, \vec{J}_e)$ die elektrischen und $j_m^\mu = (\rho_m, \vec{J}_m)$ die magnetischen Ladungs- und Stromdichten sind.

(a) Zeige, dass diese erweiterten Maxwellgleichungen unter den folgenden Transformationen invariant sind:

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= \vec{E}\cos\xi - \vec{B}\sin\xi && (5)\\
\vec{B}' &= \vec{B}\cos\xi + \vec{E}\sin\xi && (6)\\
\begin{pmatrix} \rho'_e \\ \vec{J}'_e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{J}_e \end{pmatrix}\cos\xi - \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{J}_m \end{pmatrix}\sin\xi && (7)\\
\begin{pmatrix} \rho'_m \\ \vec{J}'_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{J}_m \end{pmatrix}\cos\xi + \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{J}_e \end{pmatrix}\sin\xi\,. && (8)
\end{aligned}$$

(b) Diskutiere die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$.

(c) Zeige, dass $\vec{E} \times \vec{B}$ und $\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}$ invariant sind.

(d) Die manifest Lorentz-kovarianten Maxwell-Gleichungen mit magnetischen Quellen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu\,, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j_m^\nu\,, \tag{9}$$

sind trivialerweise invariant unter der Transformation

$$F^{\mu\nu} \to -\tilde{F}^{\mu\nu}\,, \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu}\,, \qquad j_e^\mu \to -j_m^\mu\,, \qquad j_m^\mu \to j_e^\mu\,. \tag{10}$$

Zeige, dass dies dem Spezialfall $\xi = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

(e) Zeige, dass $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ gilt, wenn $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ist.

2. **Der Dirac Monopol**

   (a) Betrachte das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten mit nur einer nicht verschwindenden Komponente

$$A_\varphi = \frac{m}{r}\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,. \tag{11}$$

   Berechne das $\vec{B}$-Feld und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m$.

   (b) Betrachte das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten mit nur einer nicht verschwindenden Komponente

$$A'_\varphi = -\frac{m}{r}\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,. \tag{12}$$

   Berechne das $\vec{B}$-Feld und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m$.

   (c) Wo sind die obigen Vektorpotentiale singulär? Zeige, dass beide Vektorpotentiale durch eine Eichtransformation $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f(r,\varphi,\vartheta)$ zusammenhängen und deshalb dieselbe Physik beschreiben.

3. **Ein Randterm und das Axion**

   (a) Zeige, dass die Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\,, \tag{13}$$

   eine totale Ableitung ist. Der obige Term gibt also in der Wirkung $S = \int d^4xL$ nur einen Randterm.

   (b) Berechne die Euler-Lagrange-Gleichung für $L$.

   (c) Betrachte ein reelles Skalarfeld $\phi(x)$ mit der Lagrangedichte

$$L_{\text{axion}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + \phi(x)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\,. \tag{14}$$

   Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\phi(x)$.

   (d) Wie verhält sich $L_{\text{axion}}$ unter der Transformation $\phi(x) \to \phi(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$? Bestimme den Noetherstrom der zu der Verschiebungssymmetrie von $\phi(x)$ gehört.

   *Bemerkung*: Ein Skalarfeld mit einer solchen Translationssymmetrie wird Axion genannt.

Ankreuzbar: 1ab, 1cde, 2abc, 3ab, 3cd