ELEKTRODYNAMIK II - ÜBUNGEN WS15

Übungsblatt 10

für das Tutorium am 17.12.2015

1. **Meissner-Effekt im Supraleiter**
   Die elektromagnetischen Eigenschaften eines Supraleiters können mit Hilfe der phänomenologischen London-Gleichungen

$$\frac{\partial \vec{\jmath}}{\partial t} = \frac{n_s g^2}{m}\vec{E}\,, \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\jmath} = -\frac{n_s g^2}{m}\vec{B}\,, \tag{1b}$$

   beschrieben werden. Hierbei ist $\vec{\jmath}$ die Stromdichte im Supraleiter und n_s, g und m die Anzahldichte, Ladung und Masse der supraleitenden Ladungsträger (Cooper-Paare). Zeige mit Hilfe von Glg. (1b), dass Magnetfelder im Supraleiter exponentiell abfallen, $B \propto e^{-x/\alpha}$, und berechne die sogenannte Eindringtiefe α.

2. **Ginzburg-Landau-Theorie eines Supraleiters**
   Die nicht-relativistische Lagrangedichte der Ginzburg-Landau-Theorie (mit $\vec{E} = 0$) ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left|\left(\vec{\nabla} + ig\vec{A}\right)\Phi\right|^2 + \frac{\mu^2}{2}|\Phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\Phi|^4 - \frac{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2}{8\pi}\,. \tag{2}$$

   Hier ist $\Phi(\vec{x})$ ein komplexes Feld, das nicht von der Zeit abhängt, $\vec{A}(\vec{x})$ das 3er-Vektorpotential, $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ der 3er-Gradient und μ, λ sind positive Parameter.

   (a) Zeige, dass die nicht-relativistische Lagrangedichte (2) aus der relativistischen Lagrangedichte folgt, die in der Vorlesung eingeführt worden ist [siehe das Blatt “Supraleitung”, Gleichungen (1), (2)], vorausgesetzt wir setzen $A_0 = 0$ und nehmen an, dass Φ und A_i zeitunabhängig sind, $\partial_0\Phi = 0 = \partial_0 A_i$.

   (b) Leite die Euler-Lagrange-Gleichungen für Φ^* und $\vec{A}$ aus der Lagrangdichte in Gleichung (2) her.

   (c) Wie muss der Strom $\vec{\jmath}$, ausgedrückt durch Φ und $\vec{A}$, lauten, damit die Euler-Lagrange-Gleichung für $\vec{A}$ identisch ist mit der Maxwell-Gleichung $\mathrm{rot}\,\vec{B} = 4\pi\vec{\jmath}$? Zeige, dass man mit dem so definierten Strom die London-Gleichung (1b) herleiten kann: Nimm dafür an, dass der Betrag von $\Phi(\vec{x})$ konstant ist, d.h. $\Phi(\vec{x}) = \Phi_0 e^{i\psi(\vec{x})}$ mit einem konstanten Φ_0. Wie muss man nun n_s definieren, um Glg. (1b) zu bekommen?

3. **Vortex im Supraleiter**
In *Typ-II Supraleitern* kann das Magnetfeld in quasi-eindimensionalen Regionen in den Supraleiter eindringen. Einen solchen Vortex (oder *Flussschlauch*) kann man im Formalismus von Aufgabe 2 beschreiben durch den folgenden Ansatz in Zylinderkoordinaten (r, φ, z),

$$\Phi(r,\varphi) = \Phi_0 f(r) e^{in\varphi}\,, \qquad \vec{A}(r) = \frac{a(r)}{g}\vec{e}_\varphi\,, \tag{3}$$

mit $\Phi_0 = \sqrt{\mu^2/\lambda}$, der sogenannten Windungszahl $n = 1, 2, 3, \ldots$, und zu bestimmenden Funktionen $f(r)$, $a(r)$. Das Magnetfeld $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ ist parallel zum Vortex, dessen Zentrum bei $r = 0$ ist. Die Phase des Feldes Φ erhöht sich um $2\pi n$ entlang einer Kreisschleife um den Vortex.

(a) Zeige, dass sich mit diesem Ansatz die in Aufgabe 2 hergeleiteten Euler-Lagrange-Gleichungen schreiben lassen als

$$\left(\frac{n}{r} + a\right)^2 f - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{f - f^3}{\xi^2}\,, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ra)}{\partial r}\right) = \frac{f^2}{\alpha^2}\left(\frac{n}{r} + a\right)\,, \tag{4b}$$

wobei $\xi = \frac{1}{\mu}$ die sogenannte *Kohärenzlänge* ist und $\alpha = \sqrt{\frac{1}{4\pi g^2 \Phi_0^2}}$ die *Eindringtiefe* (vgl. Aufgabe 1).

(b) Diskutiere die Gleichungen (4) für den Grenzfall großer Abstände vom Vortex, $r \to \infty$ (man beschränke sich auf den Fall $n = 1$).
Anleitung: Verwende den Ansatz $f(r) = 1 + u(r)$, $a(r) = -\frac{1}{r} + v(r)$ mit $u(\infty) = v(\infty) = 0$. Linearisiere in u, v, d.h. vernachlässige alle Terme u^2, v^2, uv etc. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2)y = 0$$

ist gegeben durch $y(x) = c_1 I_p(x) + c_2 K_p(x)$ mit den *modifizierten Bessel-Funktionen* 1. und 2. Art, wobei $I_p(\infty) = \infty$, $K_p(\infty) = 0$.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2c, 3a, 3b