Übungsblatt 11

für das Tutorium am 14.01.2016

1. **Wiederholung aus EDYN I: Linear polarisierte elektromagnetische Welle**

   (a) Bestimme das 3er-Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ und das Skalarpotential $\phi(\vec{x},t)$ für eine linear polarisierte ebene Welle im Vakuum der Form

$$\vec{E}(\vec{x},t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_x \tag{1}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = B_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_y \tag{2}$$

   mit $B_0 = E_0 \in \mathbb{R}$. Verwende die Randbedingung, dass die Potentiale im Unendlichen einen endlichen Wert haben müssen.
   Hinweis: Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man $\phi = 0$ wählt.

   (b) Betrachte nun eine allgemeine linear polarisierte Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$, Polarisationsrichtung $\vec{n}$ und Frequenz $\omega = |\vec{k}|$. Bestimme das Skalar- und das Vektorpotential.

   (c) Nimm an, dass die Randbedingung aus (a) nicht gilt und zeige, dass

$$\vec{A}(\vec{x},t) = -B_0 x e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_z \tag{3}$$

$$\phi(\vec{x},t) = -B_0 x e^{i(kz-\omega t)} \tag{4}$$

   die Lorentzeichung erfüllen und auch auf (1) und (2) führt.

   (d) Verifiziere Energieerhaltung der linear polarisierten Welle gegeben durch (1) und (2).

2. **Euler-Heisenberg-Lagrangedichte**
   In der relativistischen Quantenelektrodynamik (QED) werden durch quantenfeldtheoretische Effekte ("Vakuumpolarisation") Phänomene wie Streuung von Licht an Licht möglich, die keine klassische Entsprechung haben. Näherungsweise beschreibt man diese Effekte durch die Euler-Heisenberg-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \zeta\left[4(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + 7(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right], \tag{5}$$

   wobei $\zeta \equiv \frac{2\alpha^2\hbar^3}{45m_e^4c^5}$ mit der Feinstrukturkonstante α und der Elektronmasse m_e, sowie $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

   (a) Leite die dadurch definierten modifizierten Maxwellgleichungen im Vakuum über die Euler-Lagrange-Gleichungen her.

(b) Zeige, dass eine herkömmliche einzelne elektromagnetische Welle weiterhin eine Lösung der (nun nichtlinearen) modifizierten Maxwellgleichungen ist.
Hinweis: Mit den Ergebnissen aus Angabe 1 Aufgabe 3. (a) und Grundwissen über eine elektromagnetische Welle ist dieser Aufgabenteil trivial.

3. **Identität für den Feldstärketensor**
Betrachte folgende Matrix $M^{\mu\nu} \equiv \tilde{F}^{\mu\sigma} F^{\nu}{}_{\sigma}$.

(a) Zeige, dass $M^{\mu\nu} = M^{\nu\mu}$.

(b) Die einzige andere symmetrische Matrize, die linear in $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist, ist $\eta^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Zeige folgende Identität

$$M^{\mu\nu} \equiv \tilde{F}^{\mu\sigma} F^{\nu}{}_{\sigma} = c\; \eta^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,. \tag{6}$$

Bestimme die Konstante c.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a, 2b, 3ab