Übungsblatt 6

1. **Zwangsbedingungen**
Betrachte ein Fadenpendel, das sich unter Einfluß der Schwerkraft in drei Dimensionen bewegt: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Wir nehmen an, dass das Pendel in der (x, y)-Ebene schwingt und der Faden die Länge l hat. Dies führt auf den Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy + \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) + \lambda_2 z\,, \tag{1}$$

wobei $\lambda_i(t)$ zwei extra "Koordinaten" (Lagrangemultiplikatoren) sind, die die Zwangsbedingungen erzwingen.

(a) Leite die fünf Euler-Lagrange Gleichung her. Benutze diese Euler-Lagrange Gleichungen und ihre Zeitableitungen, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen.

(b) Berechne die kanonische Hamiltonfunktion und die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen.

(c) Bestimme die Dimension des Kerns von $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i\,\partial\dot{q}_j}$, die mit der Anzahl der primären Zwangsbedingungen übereinstimmt. Überprüfe die Konsistenz der primären Zwangsbedingungen mit der Zeitentwicklung bezüglich der vollen Hamiltonianfunktion.

(d) Die Zeitentwicklung der Zwangsbedingungen bezüglich der vollen Hamiltonianfunktion führt zu weiteren Zwangsbedingungen. Bestimme diese und löse für die zwei extra Parameter in der vollen Hamiltonfunktion.

Lösung:

(a) Die Euler-Lagrange Gleichungen sind $\partial_t \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$ und somit explizit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 2x\,, \\ m\ddot{y} &= \lambda_1 2y - mg\,, \\ m\ddot{z} &= \lambda_2\,, \\ 0 &= x^2 + y^2 - l^2\,, \\ 0 &= z\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch zweimaliges Ableiten der vierten Gleichung finden wir $2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0$. Einsetzen der Gleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ und auflösen nach λ_1 ergibt

$$\lambda_1 = \frac{m}{2l^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)\,, \tag{3}$$

wobei wir benutzt haben, dass $x^2 + y^2 = l^2$.
Durch zweimaliges Ableiten der letzten Gleichung finden wir $\ddot{z} = 0$. Somit folgt aus der dritten Gleichung $\lambda_2 = 0$.

(b) Die kanonische Hamiltonfunktion $H_{\rm kan} = -\mathcal{L} + \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ ist

$$
\begin{aligned}
H_{\rm kan} &= -\mathcal{L} + m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy - \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) - \lambda_2 z \\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgy - \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) - \lambda_2 z \,, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

mit $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ etc.
Die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen sind $\dot{q}_i = \frac{\partial H_{\rm kan}}{\partial p_i}$ und $\dot{p}_i = -\frac{\partial H_{\rm kan}}{\partial q_i}$ und somit

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{1}{m} p_x \,, \\
\dot{y} &= \frac{1}{m} p_y \,, \\
\dot{z} &= \frac{1}{m} p_z \,, \\
\dot{\lambda}_1 &= 0 \,, \\
\dot{\lambda}_2 &= 0 \,. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_x &= \lambda_1 2x \,, \\
\dot{p}_y &= \lambda_1 2y - mg \,, \\
\dot{p}_z &= \lambda_2 \,, \\
\dot{p}_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 - l^2 \,, \\
\dot{p}_{\lambda_2} &= z \,. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(c) In den Koordinate $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ ist die Matrize $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ diagonal und hat die Einträge $(m, m, m, 0, 0)$. Wegen der zwei Nullen ist die Dimension des Kerns 2 und die zwei primären Zwangsbedingungen sind

$$
\Phi_k = p_{\lambda_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} = p_{\lambda_k} \,. \qquad (7)
$$

Die volle Hamiltonfunktion H ist damit gegeben durch

$$
H = H_{\rm can} + u^1 \Phi_1 + u^2 \Phi_2 = H_{\rm can} + u^1 p_{\lambda_1} + u^2 p_{\lambda_2} \,. \qquad (8)
$$

Die Zeitentwicklung der Zwangsbedingungen ist gegeben durch

$$
\dot{\Phi}_k = \{\Phi_k, H\} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \,. \qquad (9)
$$

Es ergibt sich somit

$$
\dot{\Phi}_1 = x^2 + y^2 - l^2 \equiv \Phi_3 \,,
$$

$$\dot{\Phi}_2 = z \equiv \Phi_4\,. \tag{10}$$

Beachte, dass die sekundären Zwangsbedingungen den Lagrange Zwangsbedingungen entsprechen. Die Euler-Lagrange Gleichung ist

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i\,\partial q_j}\dot{q}_j\,. \tag{11}$$

Die zwei Nulleigenvektoren der Matrize $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_j}$ ergeben die Lagrange Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_1\,\partial q_j}\dot{q}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - l^2 \equiv \Phi_3\,, \\ 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_2\,\partial q_j}\dot{q}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = z \equiv \Phi_4\,. \end{aligned} \tag{12}$$

(d) Wir betrachten die Zeitentwicklung der sekundären Zwangsbedingungen $\Phi_{3/4}$, die aus der Gleichung (18) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_3 &= 2x\frac{p_x}{m} + 2y\frac{p_y}{m} \equiv \Phi_5\,, \\ \dot{\Phi}_4 &= 1 \cdot \frac{p_z}{m} \equiv \Phi_6\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Zeitentwicklung der tertiären Zwangsbedingungen ist

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_5 &= \frac{2p_x}{m}\frac{p_x}{m} + \frac{2p_y}{m}\frac{p_y}{m} - \frac{2x}{m}(-\lambda_1 2x) - \frac{2y}{m}(mg - \lambda_1 2y) \\ &= \frac{4}{m}\left(\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \lambda_1(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}mgy\right) \equiv \Phi_7\,, \\ \dot{\Phi}_6 &= \frac{1}{m}\lambda_2 \equiv \Phi_8\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Zeitentwicklung der quartiären Zwangsbedingungen ist

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_7 &= \frac{4}{m}\left(\frac{4}{m}\lambda_1(p_x x + p_y y) + u^1(x^2 + y^2) - \frac{3}{2}gp_y\right)\,, \\ \dot{\Phi}_8 &= \frac{u^2}{m}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Dies fixiert u^1 und u^2 und gibt somit keine weiteren Zwangsbedingungen. Insbesondere findet man $u^2 = 0$ und

$$u^1 = \frac{3gmp_y - 8\lambda_1(p_x x + p_y y)}{2m(x^2 + y^2)} = \frac{3gp_y}{2l^2}\,, \tag{16}$$

wobei wir im letzten Schritt $\Phi_3 = \Phi_5 = 0$ benutzt haben.

Übungsblatt 7

4. **Das Fadenpendel**
Letztes Mal haben wir den vollen Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgy - \lambda_1(x^2 + y^2 - l^2) - \lambda_2 z + u^1\Phi_1 + u^2\Phi_2\,, \tag{17}$$

mit den primären Zwangsbedingungen $\Phi_1 = p_{\lambda_1}$ und $\Phi_2 = p_{\lambda_2}$ betrachtet.

(a) Bestimme für alle acht Zwangsbedingungen ob sie erster oder zweiter Klassse sind.

(b) Bestimme die Dimension des physikalischen Phasenraums.

Lösung:

(a) Es gibt acht Zwangsbedingungen, die aus der Zeitentwicklung

$$\dot{\Phi}_k = \{\Phi_k, H\} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \tag{18}$$

der obigen Zwangsbedingungen folgen ($\dot{\Phi}_k = \Phi_{k+2}$)

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= p_{\lambda_1}\,, \\
\Phi_2 &= p_{\lambda_2}\,, \\
\Phi_3 &= x^2 + y^2 - l^2\,, \\
\Phi_4 &= z\,, \\
\Phi_5 &= 2\frac{xp_x + yp_y}{m}\,, \\
\Phi_6 &= \frac{p_z}{m}\,, \\
\Phi_7 &= \frac{4}{m}\left(\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \lambda_1(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}mgy\right)\,, \\
\Phi_8 &= \frac{\lambda_2}{m}\,, \\
\Phi_9 &= \frac{4}{m}\left(\frac{4}{m}\lambda_1(p_x x + p_y y) + u^1(x^2 + y^2) - \frac{3}{2}gp_y\right)\,, \\
\Phi_{10} &= \frac{u^2}{m}\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Das Verschwinden von Φ_9 und Φ_{10} fixiert u^1 und u^2 und somit sind Φ_9 und Φ_{10} keine Zwangsbedingungen. Insbesondere findet man $u^2 = 0$ und

$$u^1 = \frac{3gmp_y - 8\lambda_1(p_x x + p_y y)}{2m(x^2 + y^2)} = \frac{3gp_y}{2l^2}\,, \tag{20}$$

wobei wir im letzten Schritt$\Phi_3 = \Phi_5 = 0$ benutzt haben.

Um zu zeigen, dass alle Zwangsbedingungen zweiter Klasse sind, genügt es zu zeigen, dass sie alle eine nicht verschwindende Poissonklammer

$$\{\Phi_k, \Phi_l\} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi_l}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_l}{\partial q_i} \tag{21}$$

mit einer anderen Zwangsbedingung haben:

$$\begin{aligned}
\{\Phi_1, \Phi_7\} &= \frac{4}{m}(x^2 + y^2) = \frac{4}{m}(\Phi_3 + l^2) \approx \frac{4}{m}\, l^2 \neq 0\,, \\
\{\Phi_2, \Phi_8\} &= \frac{1}{m} \neq 0\,, \\
\{\Phi_3, \Phi_5\} &= \frac{4}{m}(x^2 + y^2) = \frac{4}{m}(\Phi_3 + l^2) \approx \frac{4}{m}\, l^2 \neq 0\,, \\
\{\Phi_4, \Phi_6\} &= \frac{1}{m} \neq 0\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Somit sind alle Zwangsbedingungen zweiter Klasse.

(b) Es gibt acht Zwangsbedingungen, die alle zweiter Klasse sind. Somit finden wir wegen der fünf Variablen und Impulse, dass

$$D_{\text{phys}} = D - S - 2F = 2 \cdot 5 - 8 - 2 \cdot 0 = 2\,. \tag{23}$$

Dies ist die erwartete Antwort für ein eindimensionales Fadenpendel.