Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

2. Tutoriumstermin (20.4.2015)

T3. Gegeben ist die Zustandsgleichung des van der Waals Gases

$$\left(P + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_{\mathrm{B}}T.$$

(a) Berechnen Sie den kritischen Punkt (also T_{c}, P_{c}, und V_{c}), der durch die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

festgelegt ist.

Schreiben Sie die van der Waals Gleichung in reduzierten, dimensionslosen Variablen $T^* = T/T_{\mathrm{c}}$, $P^* = P/P_{\mathrm{c}}$ und $V^* = V/V_{\mathrm{c}}$ an.

(b) Führen Sie nun die Größen

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c} \qquad \pi = \frac{P - P_c}{P_c} \qquad \omega = \frac{V - V_c}{V_c}$$

ein, die in der Nähe des kritischen Punktes kleine Werte (typischerweise 10^{-4} und kleiner) annehmen.

Leiten Sie einen Näherungsausdruck für die Zustandsgleichung des van der Waals Gases in der Nähe des kritischen Punktes unter Verwendung von τ, π, und ω her, wobei Sie Terme bis zur dritten Ordnung in diesen Größen berücksichtigen sollen.

Hinweis: verwenden Sie

$$(1 + x)^{-1} \sim 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \text{und} \qquad (1 + x)^{-2} \sim 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

T4. Gegeben sei das "q-state" Potts-Modell in einer Dimension mit $q = 3$ und periodischen Randbedinungen. Jeder der N Spins des Systems, s_i, kann q (also 3) Werte annehmen: $s_i = 1$, 2, und 3.

Die Hamilton-Funktion des Systems ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = -K\sum_{i=1}^{N}\delta_{s_i,s_{i+1}},$$

wobei $\delta_{s_i,s_{i+1}}$ das Kronecker-Symbol ist.

Für die weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig $x = \exp[\beta K]$ einzuführen.

(a) Geben Sie die Transfermatrix $\mathcal{T}$ des Systems an und berechnen Sie die drei Eigenwerte λ_j dieser Matrix.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Eigenwerte die freie Energie $F(T,N)$. Welchem Wert strebt F/N für $N \to \infty$ zu?

T5. Betrachten Sie nun das "q-state" Potts-Modell in einer Dimension mit $q = 2$ (also $s_i = 1$ und 2) und periodischen Randbedinungen; die Hamilton-Funktion des Systems ist in Beispiel T4 gegeben.

Berechnen Sie über den Transfermatrixformalismus die freie Energie $F(T,N)$ des Systems und vergleichen Sie das Ergebnis mit der freien Energie des Ising-Modells (eine Dimension, periodische Randbeginungen, $H = 0$).

Welche Schlußfolgerungen können Sie aus dem Vergleich ziehen?