

Statistische Physik II (SS 2016): Tutorium 3

7. Pauli-Paramagnetismus

Die Energieeigenwerte eines freien 3D Elektronengases im Magnetfeld seien bekannt und gegeben durch die Formel

$$\epsilon_{\mathbf{p}\pm} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \pm \frac{1}{2}g_s\mu_B B. \quad (1)$$

- (a) Leiten Sie die Zustandsdichte $\nu(\epsilon)$ freier Elektronen ($B = 0$) als Funktion der Einteilchenenergie ϵ her. Für die Zustandsdichte gilt

$$\nu(\epsilon) = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}}), \quad (2)$$

wobei $\epsilon_{\mathbf{p}}$ die Energie zum Impuls \mathbf{p} , und $g = (2S + 1)$ den Spinentartungsgrad bezeichnet. Die Normierung sei so gewählt, dass $\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \nu(\epsilon) = N$.

- (b) Bestimmen Sie nun für den Fall $g_s\mu_B B \ll \mu \approx \epsilon_F$ einen Näherungsausdruck für die Anzahl der Elektronen mit zu B parallelem/antiparallelem Spin

$$N_{\pm} = \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{1}{2}\nu(\epsilon)n(\epsilon \pm \frac{1}{2}g_s\mu_B B) \quad (3)$$

durch Taylorentwicklung in B .

- (c) Setzen Sie $g_s = 2$ und leiten Sie aus dem Resultat von b) dann einen Ausdruck für die Magnetisierung

$$M = -\mu_B \frac{N_+ - N_-}{V} \quad (4)$$

und die Suszeptibilität $\partial M/\partial B$ im Grenzfall $T \rightarrow 0$ ab.

8. Ising-Modell im transversalen Feld

Im Gegensatz zur Vorlesung betrachten wir in dieser Übung das Ising-Modell in einem *transversalen* Magnetfeld (d.h. in x-Richtung),

$$H_{\text{TIM}} = \mu B \sum_i \sigma_x^i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_z^i \sigma_z^j. \quad (5)$$

Dieses Modell soll im Rahmen der Molekularfeldnäherung untersucht werden.

- (a) Betrachten Sie zuerst als Vorübung das paramagnetische System aus N Spin $S = 1/2$ Teilchen in einem externen Feld $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$,

$$H = - \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}. \quad (6)$$

Berechnen Sie die freie Energie $F(T, \vec{B})$, das normierte magnetische Moment pro Teilchen $\vec{m} = \vec{M}/(N\mu)$ und die Komponenten χ_{xx} , χ_{zz} und χ_{xz} des Suszeptibilitätstensors

$$\chi_{nk} = \left. \frac{\partial \vec{m}_n}{\partial B_k} \right|_T. \quad (7)$$

- (b) Lösen Sie das transversale Ising Modell H_{TIM} mit Hilfe der Molekularfeldnäherung $\sigma_z^j \approx \langle \sigma_z^j \rangle$. Berechnen Sie die freie Energie $F(T, B)$ und die Zustandsgleichungen für $m_x = -\langle \sigma_x \rangle$ und $m_z = -\langle \sigma_z \rangle$.
- (c) Skizzieren und diskutieren Sie das Phasendiagramm des TIM als Funktion der Temperatur T und dem externen Feld B . Bestimmen Sie dazu, ausgehend von der Gleichung für m_z , die kritische Feldstärke B_c und kritische Temperatur T_c , bei denen der Übergang von der paramagnetischen ($m_z = 0$) zur ferromagnetischen Phase ($m_z \neq 0$) stattfindet:
- Die kritische Temperatur T_c im Grenzfall $B = 0$.
 - Das kritische Feld B_c im Grenzfall $T = 0$.
 - Die allgemeine (implizite) Beziehung zwischen B_c und T_c .

Kreuze für: 7a), 7b), 7c), 8a), 8b), 8c)