Statistische Physik II (SS 2016): Tutorium 4

9. Potts Modell

Gegeben sei eine 1D Kette mit N 'klassischen' Spin-1 Freiheitsgraden, die jeweils die Werte $s_i = -1, 0, +1$ annehmen können. Die Hamiltonfunktion des Systems sei

$$H = -U \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, s_{i+1}} \tag{1}$$

und es werden periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $s_{N+1} = s_1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme als $Z_\mathrm{K} = \mathrm{Sp}\{\hat{P}^N\}$ geschrieben werden kann und berechnen Sie die Elemente der Transfermatrix $P_{ss'} = \langle s|\hat{P}|s'\rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{P}$ und einen allgemeinen Ausdruck für Z_K.

(c) Berechnen Sie die freie Energie F für den Grenzfall $N \to \infty$. Bestimmen Sie $F(T \to 0)$ und $F(T \gg U/k_B)$.

(d) Berechnen und skizzieren Sie die spezifische Wärme $C(T)$. Gibt es einen Phasenübergang als Funktion von T?

10. Das Dicke-Modell

Die Dipolkopplung eines Atoms mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ an das elektrische Feld einer einzelnen quantisierten Feldmode ist durch

$$H_\mathrm{dip} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{E} = \hbar g (a + a^\dagger)\sigma_x \tag{2}$$

gegeben. Dabei sind a und $a^\dagger$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der Feldmode, die als harmonischer Oszillator beschrieben wird, und g ist die Kopplungsstärke.

Die Kopplung von N Atomen and das Feld eines optischen Resonators wird deshalb oft vereinfacht durch das sogenannte Dicke-Modell (DM)

$$H_\mathrm{D} = \hbar\omega_r a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_z^i + \hbar g \sum_{i=1}^{N} (a + a^\dagger)\sigma_x^i \tag{3}$$

beschrieben, wobei ω_a die atomare Übergangsfrequenz und ω_r die Frequenz der optischen Mode bezeichnet. Das DM soll mit Hilfe der Molekularfeldnäherung gelöst werden.

(a) Betrachten Sie zuerst als Vorübung einen harmonischen Oszillator auf dem zusätzlich eine konstante Kraft F wirkt,

$$H = \hbar\omega a^\dagger a - F x_0 (a + a^\dagger). \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Zustandssumme dieses Systems durch

$$Z_{\mathrm{K}} = \frac{e^{\beta \frac{F^2 x_0^2}{\hbar \omega_r}}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_r}} \tag{5}$$

gegeben ist und berechnen Sie $\langle \hat{x} \rangle = x_0 \langle a + \hat{a}^\dagger \rangle$ durch eine geeignete Ableitung von Z_{K}.

(b) Berechnen Sie die freie Energie F des DM in der Molekularfeldnäherung.

(c) Bestimmen Sie die Gleichungen für $\alpha = \langle a \rangle \in \mathbb{R}$ und $S = \sum_i \langle \sigma_x^i \rangle$. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für die kritische Kopplungstärke g_c bei $T = 0$ ab, bei der das System von einer 'normalen' Phase mit $\alpha = S = 0$ in eine 'superradiante' Phase mit $\alpha \neq 0, S \neq 0$ übergeht.

(d) Skizzieren Sie das Phasendiagramm für beliebige T und g.

Kreuze für: 9a), 9b)+c), 9d), 10a), 10b), 10c)+d)