Statistische Physik II (SS 2016): Tutorium 6

13. Elektrische Leitfähigkeit

Betrachten Sie ein Gas aus geladenen Teilchen mit Masse m und Ladung q. Die Einteilchen-Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ der Teilchen sei durch die Boltzmann Gleichung (BG)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_x + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p\right) f(\vec{x}, \vec{p}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} \tag{1}$$

beschrieben (siehe Vorlesung). In der Abwesenheit einer äußeren Kraft ist die stationäre Verteilung durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f^0(\vec{x}, \vec{p}) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2mk_B T}\right) \tag{2}$$

mit einer homogenen Teilchendichte n_0 gegeben.

(a) Leiten Sie aus der BG die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}_x \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \tag{3}$$

für die lokale Dichte $n(\vec{x}, t) = \int d^3p\, f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t) = \int d^3p\, f(\vec{x}, \vec{p}, t)\, \vec{p}/m$ ab.

(b) Berechnen Sie die stationäre Lösung der BG in der Relaxationszeitnäherung für ein homogenes äußeres elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{e}_x E$. Nehmen Sie weiters an, dass das elektische Feld schwach ist und nur eine kleine Störung der Verteilungsfunktion bewirkt. Leiten Sie aus dem Resultat einen Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit σ ab.

(c) Betrachten Sie nun ein oszillierendes elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{e}_x E \cos(\omega t)$ und zeigen Sie, dass unter den gleichen Näherungen wie in (b) die Leitfähigkeit bei endlichen Frequenzen durch

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma}{1 + i\omega\tau_{\text{r}}} \tag{4}$$

gegeben ist.

14. Viskosität

Ein Gas sein zwischen zwei parallelen Platten mit Abstand d eingeschlossen. Die erste Platte bei $z = 0$ sei fix, die zweite Platte bei $z = d$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit u_x in x-Richtung. Dabei wird auch das Gas 'mitgezogen' und es bildet sich ein mittleres Geschwindigkeitsprofil $u_x(z)$ aus. Die *lokale* Gleichgewichtsverteilung sei dann durch

$$f^0(\vec{x}, \vec{p}) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{[p_x - m u_x(z)]^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T}\right) \tag{5}$$

gegeben. Auf die Platte mit Fläche A wirkt dabei eine Kraft

$$\frac{F}{A} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{6}$$

wobei der Parameter η die Viskosität des Gases bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die beschriebene Situation und die lokale Gleichgewichtsverteilung in der (z, p_x) Ebene. Erklären Sie damit qualitativ die Kraft F auf die Platte im Gleichgewicht.

(b) Lösen Sie die BG für das Gas in der Relaxationszeitnäherung.

(c) Berechnen sie die mittleren Impulsstromdichte $\Pi_{x,z}$, d.h. die mittlere x-Impluskomponente der Teilchen welche sich pro Zeit und pro Fäche in z-Richtungbewegen. Begründen Sie $F/A = \Pi_{x,z}$ und berechnen Sie damit einen Ausdruck für die Viskosität eines (fast) idealen Gases.

Kreuze für: 13a), 13b), 13c), 14a), 14b), 14c)