Statistische Physik II (SS 2018): Tutorium 3

7. Mittlere freie Weglänge und Stoßzeit

In der Vorlesung wurden die mittlere Zeit zwischen 2 Stößen τ und die mittlere freie Weglänge l grob durch $\tau = 1/(n\sigma v)$ und $l = v\tau$, mit einer typischen Geschwindigkeit v, abgeschätzt. Etwas präziser gilt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2R_s}{n}, \qquad l = \hat{v}\tau, \tag{1}$$

wobei $\hat{v} = \sqrt{2k_BT/m}$ die *wahrscheinlichste* Geschwindigkeit der Maxwell-Boltzmann Verteilung und

$$R_s = \int d^3p_1 \int d^3p_2 \; \sigma_{\text{tot}} \, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \, f(\vec{x}, \vec{p}_1, t) \, f(\vec{x}, \vec{p}_2, t) \tag{2}$$

die Rate der Stöße pro Einheitsvolumen bezeichnen. Dabei wurde angenommen, dass der Streuquerschnitt σ_{tot} nicht von der Geschwindigkeit abhängt.

a) Geben Sie eine anschauliche Begründung für die Ausdrücke in Gleichung (1) an. Woher kommt der Faktor 2?

b) Berechnen Sie R_s, τ und l für ein Gas im Gleichgewicht, $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f^0(\vec{x}, \vec{p})$.

c) Geben Sie eine Abschätzung von l und τ für molekularen Wasserstoff (H_2) (i) am kritischen Punkt ($T_c \sim 33$ K, kritisches (molares) Volumen $\sim 65\,\text{cm}^3/\text{mol}$) und (ii), nur für l, im interstellaren Raum ($n = 1\,cm^{-3}$) an. *Hinweis*: Verwenden Sie für Ihre Rechnung $\sigma_{\text{tot}} \simeq \pi a^2$, wobei $a \sim 1$Å eine Abschätzung des molekularen Durchmessers von H_2 ist.

8. Einteilchen-Verteilungsfunktion, H-Funktion und Entropie

In der Vorlesung wurde die Größe $H(t)$ eingeführt, die im Wesentlichen einer Entropie

$$S_H(t) = -k_B H(t) = -k_B \int \frac{d^3x d^3p}{h^3} \, \tilde{f}(\vec{x}, \vec{p}, t) \ln \tilde{f}(\vec{x}, \vec{p}, t), \tag{3}$$

entspricht, wobei $\tilde{f}(\vec{x}, \vec{p}, t) = h^3 f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ die (dimensionlose) 1-Teilchen-Verteilungsfunktion bezeichnet. Diese Definition is analog zur üblichen Definition der Entropie in der statistischen Physik,

$$S = -k_B \int d\Gamma_N \, \rho_N(\underline{x}, \underline{p}) \ln \rho_N(\underline{x}, \underline{p}), \qquad d\Gamma_N = \frac{d^{3N}x d^{3N}p}{h^{3N} N!}, \tag{4}$$

wobei hier $\rho_N(\underline{x}, \underline{p})$ die N-Teilchen Phasenraumdichte bezeichnet.

(a) Wie lautet $\rho_N(\underline{x}, \underline{p}) \equiv \rho_{\text{K}}(\underline{x}, \underline{p})$ für ein ideales Gas im thermischen Gleichgewicht? Bestimmen Sie daraus die Gleichgewichtsverteilung $f^0(\vec{x}, \vec{p})$.

(b) Betrachten Sie nun für ein System mit $N = 2$ Teilchen die Phasenraumverteilung

$$\rho_{\text{korr}}(\underline{x}, \underline{p}) \sim \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) e^{-\frac{\beta}{2m}(\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2)}, \tag{5}$$

welche zwei stark gebundenen (=stark korrelierten) Teilchen repräsentiert. Bestimmen Sie den korrekten Normierungsfaktor von ρ_{korr} und zeigen Sie explizit für $N = 2$, dass man für ρ_K und ρ_{korr} die gleichen Einteilchen-Verteilungsfunktionen $f_{\text{korr}}(\vec{x}_1, \vec{p}_1) = f^0(\vec{x}_1, \vec{p}_1)$ erhält.

(c) Berechnen Sie S_H und S für ein ideales Gas im thermischen Gleichgewicht. Zeigen Sie, dass die Entropien S_H und S sehr ähnlich, aber nicht identisch sind.

9. Elektrische Leitfähigkeit

Betrachten Sie ein Gas aus geladenen Teilchen mit Masse m und Ladung q. Die Einteilchen-Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ der Teilchen sei durch die Boltzmann Gleichung (BG)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_x + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p\right) f(\vec{x}, \vec{p}, t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} \tag{6}$$

beschrieben (siehe Vorlesung). In der Abwesenheit einer äußeren Kraft ist die stationäre Verteilung durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f^0(\vec{x}, \vec{p}) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2 m k_B T}\right) \tag{7}$$

mit einer homogenen Teilchendichte n_0 gegeben.

(a) Leiten Sie aus der BG die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}_x \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \tag{8}$$

für die lokale Dichte $n(\vec{x}, t) = \int d^3p\, f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t) = \int d^3p\, f(\vec{x}, \vec{p}, t)\, \vec{p}/m$ ab.

(b) Berechnen Sie die stationäre Lösung der BG in der Relaxationszeitnäherung für ein homogenes äußeres elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{e}_x E$. Nehmen Sie weiters an, dass das elektische Feld schwach ist und nur eine kleine Störung der Verteilungsfunktion bewirkt. Leiten Sie aus dem Resultat einen Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit σ ab. Verwenden Sie

$$\vec{j}_e = \sigma \vec{E}, \tag{9}$$

wobei $\vec{j}_e$ die elektrische Stromdichte bezeichnet.

(c) Betrachten Sie nun ein oszillierendes elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{e}_x E \cos(\omega t)$ und zeigen Sie, dass unter den gleichen Näherungen wie in (b) die Leitfähigkeit bei endlichen Frequenzen durch

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma}{1 + i\omega\tau_{\text{r}}} \tag{10}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die Theorie zu Aufgabe 9 wird in der Vorlesung am 17.04.2018 behandelt.

Kreuze für: 7, 8a)+b), 8c), 9a), 9b), 9c)