Statistische Physik II (SS 2018): Tutorium 4

10. Viskosität

Ein Gas sein zwischen zwei parallelen Platten mit Abstand d eingeschlossen. Die erste Platte bei $z = 0$ sei fix, die zweite Platte bei $z = d$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v in x-Richtung. Dabei wird auch das Gas 'mitgezogen' und es bildet sich ein mittleres Geschwindigkeitsprofil $v_x(z)$ mit $v_x(0) = 0$ und $v_x(d) = v$ aus. Die *lokale* Gleichgewichtsverteilung sei dann durch

$$f^0(\vec{x}, \vec{p}) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{[p_x - m v_x(z)]^2 + p_y^2 + p_z^2}{2 m k_B T}\right) \tag{1}$$

gegeben. Auf die Platte mit Fläche A wirkt dabei eine Kraft

$$\frac{F}{A} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}, \tag{2}$$

wobei der Parameter η die Viskosität des Gases bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die beschriebene Situation und die lokale Gleichgewichtsverteilung in der (z, p_x) Ebene. Erklären Sie damit qualitativ die Kraft F auf die Platte im Gleichgewicht.

(b) Berechnen Sie die stationäre Lösung $f(\vec{x}, \vec{p})$ der Boltzmann Gleichung für dieses System in der Relaxationszeitnäherung.

(c) Berechnen Sie die mittleren Impulsstromdichte $\Pi_{x,z}$, d.h. die mittlere x-Impluskomponente der Teilchen, die sich pro Zeit und pro Fäche in z-Richtung bewegen. Begründen Sie $F/A = \Pi_{x,z}$ und berechnen Sie damit einen Ausdruck für die Viskosität eines (fast) idealen Gases.

11. Spezifische Wärme gekoppelter/ungekoppelter magnetischer Momente

Betrachten Sie ein eindimensionales Ising Modell mit N Gitterplätzen und periodischen Randbedingungen, aber ohne externes B-Feld:

$$H^{1D}_{\text{Ising}} = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_z^i \sigma_z^{i+1} - J \sigma_z^N \sigma_z^1, \tag{3}$$

wobei $J > 0$ und $\sigma_z^i = \pm 1$.

a) Zeigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ die kanonische Zustandssumme Z_{K} für dieses wechselwirkende System formal die gleiche Form wie die Zustandssumme eines Systems von N ungekoppelten Spins in einem externen Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$ (in der VO für die Beschreibung des Paramagnetisums verwendet) hat. Berechnen Sie Z_{K}.

   Hinweis: Drücken sie H^{1D}_{Ising} durch die Variablen $\zeta_i = \sigma_z^i \sigma_z^{i+1}$ aus.

b) Berechnen Sie nun die entsprechenden Ausdrücke für die Entropie $S(T)$ und die spezifischen Wärme $C_V(T)$ der zwei Systeme als Funktion von T. Skizzieren Sie den Verlauf von $C_V(T)$ als Funktion von T und interpretieren Sie das Resultat.

12. Antiferromagnetismus im Ising Modell

Betrachten Sie das eindimensionale Ising Modell:

$$H^{1D}_{\text{Ising}} = \mu_B B \sum_{i=1}^{N} \sigma_z^i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_z^i \sigma_z^j \tag{4}$$

mit offenen Randbedingungen (und einer geraden Anzahl N an Gitterplätzen).

a) Bestimmen Sie explizit die Grundzustandskonfiguration der Spins für die zwei Fälle: (i) $J > 0$ und (ii) $J < 0$ (jeweils ohne Magnetfeld: $B = 0$).Wie ändern sich diese Ergebnisse als Funktion eines externen Magnetfeldes $B > 0$?

b) Betrachten Sie nun das (entsprechende) eindimensionale Heisenberg Modell (mit $B = 0$):

$$\begin{aligned} H^{1D}_{\text{Heis}} &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \left[S_x^i S_x^j + S_y^i S_y^j + S_z^i S_z^j \right] &(5) \\ &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\frac{1}{2} \left(S_+^i S_-^j + S_-^i S_+^j \right) + S_z^i S_z^j \right], &(6) \end{aligned}$$

wobei $S_\pm = S_x \pm i S_y$ die entsprechenden Leiteroperatoren sind. Was ändert sich am Ergebnis für den Grundzustand im Vergleich zum 1D Ising Modell in den zwei Fällen $J > 0$ und $J < 0$? Überlegen Sie, welche physikalischen Implikationen sich daraus für die Magnetisierung eines Anitferromagneten ergeben.

c) Berechnen Sie explizit die Molekularfeldlösung für das oben angegebene 1D Ising Modell, Gl. (3), mit $J < 0$ und $B = 0$, und bestimmen Sie die Werte der spontanen Magnetisierung pro Platz [$m = \frac{1}{N} \sum_i m_i = -\frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_z^i \rangle$] und der sogenannten (spontanen) "staggered Magnetisierung" [$m_{\text{AF}} = \frac{1}{N} \sum_i (-1)^i m_i$] pro Platz. Berechnen Sie auch die kritische Temperatur des antiferromagnetischen Phasenübergangs (d.h., die sogenannte Néel Temperatur: T_N).

   Hinweis: Die Molekularfeldnäherung wird in der Vorlesung am 8.05. diskutiert. Für die Behandlung des antiferromagnetischen Ising Modells teilen Sie das System in zwei Untergitter auf, wobei die Magnetisierung pro Platz (m_i) im Betrag gleich ist, aber ein unterschiedliches Vorzeichen hat, d.h. $m_i = |m|(-1)^i$.

Kreuze für: 10a)+b), 10c), 11a), 11b), 12a)+b), 12c)