Statistische Physik II (SS 2018): Tutorium 5

13. Das Potts-Modell

Gegeben sei eine 1D Kette mit N 'klassischen' Spin-1 Freiheitsgraden, die jeweils die Werte $s_i = -1, 0, +1$ annehmen können. Die Hamiltonfunktion des Systems sei

$$H = -U \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, s_{i+1}}, \tag{1}$$

wobei periodische Randbedingungen angenommen werden, d.h. $s_{N+1} = s_1$.

(a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme als $Z_\mathrm{K} = \mathrm{Sp}\{\hat{P}^N\}$ geschrieben werden kann und berechnen Sie die Elemente der Transfermatrix $P_{ss'} = \langle s|\hat{P}|s'\rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{P}$ und einen allgemeinen Ausdruck für Z_K.

(c) Berechnen Sie die freie Energie F für den Grenzfall $N \to \infty$. Bestimmen Sie $F(T \to 0)$ und $F(T \gg U/k_B)$.

(d) Berechnen und skizzieren Sie die spezifische Wärme $C(T)$. Gibt es einen Phasenübergang als Funktion von T?

14. Kritische Temperatur des 2D Ising-Modells

Wie in der VO besprochen, ist die exakte Lösung des Ising-Modells [*L. Onsager, 1944*] sehr aufwändig und kompliziert. Deshalb gibt es viele alternative Methoden, um präzise Abschätzungen der physikalischen Größen des 2D Modells mit einem deutlich geringeren Aufwand zu erhalten. Eine sehr einfache, aber gleichzeitig verblüffend genaue Abschätzung der kritische Temperatur erhält man wie folgt.

(a) Gegeben sei ein minimales 2D Ising-Modell mit insgesamt nur 4 Spins, die in einem Quadrat angeordnet sind. Die Kopplung zwischen Nachbarplätzen sei $J > 0$ und $B = 0$. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z_\mathrm{K}(T, N = 4)$ dieses Systems als Funktion von J und T.

(b) Für dieses einfache Gitter können die FM und die AF Spin-Konfigurationen als "geordnet"(G) und alle anderen Konfigurationen als "ungeordnet"(U) klassifiziert werden. Schätzen Sie nun die kritische Temperatur (T_c) des Phasenübergangs des 2D Ising-Modells durch die Temperatur ab, bei der die Beiträge der geordneten und der ungeordneten Konfigurationen zur Zustandssumme gleich sind, d.h. $Z_U(T = T_c) = Z_G(T = T_c)$. Vergleichen Sie diese Temperatur mit der exakten kritischen Temperatur der Onsager Lösung (siehe VO Unterlagen).

15. Das Dicke-Modell

Die Dipolkopplung eines Atoms mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ an das elektrische Feld einer einzelnen quantisierten Feldmode ist durch

$$H_{\mathrm{dip}} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{E} = \hbar g(a + a^\dagger)\sigma_x \tag{2}$$

gegeben. Dabei is $\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|$ und a und $a^\dagger$ sind die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der Feldmode, die als harmonischer Oszillator beschrieben wird. g bezeichnet die Kopplungsstärke.

Die Kopplung von N Atomen and das Feld eines optischen Resonators wird deshalb oft vereinfacht durch das sogenannte Dicke-Modell (DM)

$$H_{\mathrm{D}} = \hbar\omega_r a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_z^i + \hbar g\sum_{i=1}^{N}(a + a^\dagger)\sigma_x^i \tag{3}$$

beschrieben, wobei ω_a die atomare Übergangsfrequenz und ω_r die Frequenz der optischen Mode bezeichnet, und $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$. Das DM soll mit Hilfe der Molekularfeldnäherung gelöst werden.

(a) Betrachten Sie zuerst als Vorübung einen harmonischen Oszillator auf dem zusätzlich eine konstante Kraft F wirkt,

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a - F x_0(a + a^\dagger). \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die Zustandssumme dieses Systems durch

$$Z_{\mathrm{K}} = \frac{e^{\beta\frac{F^2 x_0^2}{\hbar\omega_r}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_r}} \tag{5}$$

gegeben ist und berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle = x_0\langle a + \hat{a}^\dagger\rangle$ durch eine geeignete Ableitung von Z_{K}. *Hinweis: Quadratisch ergänzen.*

(b) Berechnen Sie die freie Energie F des DM in der Molekularfeldnäherung.

(c) Bestimmen Sie die Gleichungen für $\alpha = \langle a\rangle \in \mathbb{R}$ und $S = \sum_i\langle\sigma_x^i\rangle$. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für die kritische Kopplungstärke g_c bei $T = 0$ ab, bei der das System von einer normalen' Phase mit $\alpha = S = 0$ in eine 'superradiante' Phase mit $\alpha \neq 0, S \neq 0$ übergeht.

(d) Skizzieren Sie das Phasendiagramm für beliebige T und g.

Kreuze für: 13a), 13b)+c), 13d); 14a)+b); 15a)+b), 15c)+d)