Statistische Physik II (SS 2018): Tutorium 6

16. Skalierungsverhalten der freien Energie

Die Skalierungshypothese besagt, dass die freie Energie eines magnetischen Systems in der Nähe des kritischen Punkts eine *verallgemeinerte* homogene Funktion ist, d.h.

$$F(\lambda^x \tau, \lambda^y B) = \lambda F(\tau, B), \tag{1}$$

wobei $\tau = (T - T_c)/T_c$ und $\lambda = L^d$.

Betrachen Sie nun die freie Energie eines magnetischen Systems in der Landau Theorie

$$F(\tau, B; m) = a_0 \tau m^2 + b m^4 - Bm. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die daraus resultierende freie Energie $F(\tau, B) \equiv F(\tau, B; m(\tau, B))$ eine verallgemeinerte homogene Funktion der Variablen τ und B ist.

17. Skalierungsrelationen der Korrelationsfunktion

Die Skalierungshypothese wurde in der VO verwendet, um die zwei folgenden Skalierungsrelationen zwischen den kritischen Exponenten herzuleiten: $\gamma = \beta(\delta - 1)$ (Widom Gl.), und $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ (Rushbrook Gl.).

Betrachten Sie nun die ortsabhängige Korrelationsfunktion des Ising Modells: $G(r = |i - j|, \tau) = \langle \sigma_z^i \sigma_z^j \rangle - \langle \sigma_z^i \rangle \langle \sigma_z^j \rangle$. Unter der Annahme, dass die Korrelationsfunktion G des Block-Spin Modells mit skalierten Variablen die gleiche Form wie im Einzelspinmodell hat, wird die allgemeine Form der Skalierungsrelation für G wie folgt aussehen:

$$G(r, \tau) = L^{2d(y-1)} G(\tilde{r}, \tilde{\tau}),$$

wobei $\tilde{r} = r/L$ und $\tilde{\tau} = \tau L^{dx}$. Der Vorfaktor $L^{2d(y-1)}$ ergibt sich durch das Quadrat des Skalierungsvorfaktors des Ordnungsparameters, d.h. $\langle \sigma_z \rangle = m(\tau, B) \to L^{d(y-1)} m(\tilde{r}, \tilde{B})$.

Bestimmen Sie durch Vergleich mit dem allgemeinen kritischen Verhalten von G in der Nähe des Phasenübergangs, d.h. $G(r, \tau) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}$, mit $\xi(\tau) = |\tau|^{-\nu}$, die entsprechenden Relationen zwischen x und y und den kritischen Exponenten ν und η, so wie die verbleibenden zwei Skalierungsrelationen, $2 - \alpha = d\nu$ und $\gamma = \nu(2 - \eta)$.

18. Landau-Theorie des ferroelektrischen Phasenübergangs

Eine ferroelektrische Phase ist durch das Auftreten einer spontanen elektrischen Polarisierung $\mathcal{P} \in \mathbb{R}$ charakterisiert, welche die Inversionssymmetrie des Kristallgitters bricht. In der Laudau Näherung wird die freie Energie des ferroelektrischen Materials in der Nähe des Phasenübergangs durch

$$F(T; \mathcal{P}) = a(T)\mathcal{P}^2 + b\mathcal{P}^4 + c\mathcal{P}^6 - \mathcal{E}\mathcal{P} \tag{3}$$

approximiert, wobei $a(T) = a_0(T - T_c^0)$ und $\mathcal{E}$ das externe elektrische Feld bezeichnet. Die Konstanten $a_0 > 0$, b und $c > 0$ können als temperaturunabhängig angenommen werden. Im Gegensatz zum Beispiel aus der Vorlesung kann b auch negative Werte annehmen.

(a) Skizzieren Sie $F(T;\mathcal{P})$ für verschiedene T, $\mathcal{E} = 0$ und für die zwei Fälle i) $b > 0$ und ii) $b < 0$. Argumentieren Sie qualitativ, warum es für $b > 0$ einen Phasenübergang 2. Ordnung bei $T = T_c^0$ gibt, aber für $b < 0$ ein Phasenübergang 1. Ordnung bei einer Temperatur $T = T_c > T_c^0$ stattfindet.

(b) Berechnen Sie T_c und das Verhalten von $\mathcal{P}(T)$ für $b > 0$ und $b < 0$ unter der Annahme $\mathcal{E} = 0$.

(c) Berechnen Sie für $b < 0$ und $\mathcal{E} = 0$ die latente Wärme $Q_L = T_c \Delta S$, die beim Übergang von der geordneten zur ungeordneten Phase notwendig ist. *Hinweis:* Die schwache temperaturabhängigkeit von $\mathcal{P}$ kann für $T < T_c$ vernachlässigt werden.

(d) Für $b = 0$ existiert bei $T = T_c$ ein sogenannter *trikritischer Punkt*. Berechnen Sie für diesen Fall die kritischen Exponenten α, β, γ and δ.

Kreuze für: 16), 17), 18a), 18b), 18c), 18d)