Name:
Matrikelnummer:
Zahl der abgegebenen Blätter:

VU-Test - 28.6.2019

1. Gas im Schwerefeld mit homogener Dichte (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas aus N Teilchen der Masse m in einem Zylinder mit Radius R und Höhe H. Entlang der Zylinderachse (z-Achse) wirkt das Schwerefeld $V(x,y,z) = mgz$. Zwischen Boden und Deckel des Zylinders herrscht eine (kleine) Temperaturdifferenz ΔT, die so gewählt wird, dass sich eine **homogene** Dichte n_0 ergibt.

(a) (3 Punkte) Wie lautet die lokale Gleichgewichtsverteilung $f_1^{(0)}(z,\mathbf{p})$ des Gases?

(b) (6 Punkte) Im Gleichgewicht verschwindet die mittlere Driftgeschwindigkeit $\langle v_z\rangle = 0$. Berechnen Sie mit der Relaxationszeitnäherung den Temperaturgradienten $\frac{dT}{dz}$ im Gas.
Hinweis: Für die Mittelwerte über $f_1^{(0)}$ gilt $\langle p_z^2\rangle_0 = n_0 m k_B T$ und $\langle \mathbf{p}^2 p_z^2\rangle_0 = 5n_0(mk_BT)^2$.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie für ein ideales Gas, dass die resultierende Kraft F, die das Gas auf den Zylinder ausübt, gegeben ist durch $F = Nmg$.
Hinweis: Denken Sie einfach und verwenden Sie die thermische Zustandsgleichung.

2. Wärmerauschen im Stromkreis mit Spule (14 Punkte)

Betrachten Sie einen Stromkreis bestehend aus einer Spule mit Induktivität L und einem Widerstand R bei Temperatur T. Durch die thermischen Spannungsfluktuationen am Widerstand wird im Stromkreis ein Strom $J(t)$ induziert, der durch die stochastische Differentialgleichung

$$L\frac{d}{dt}J(t) + RJ(t) = \sqrt{2Rk_BT}\,\xi(t)$$

beschrieben werden kann, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ ungerichtet $\langle\xi(t)\rangle = 0$, unkorreliert $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$ und normalverteilt ist.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_\infty(J)$ im Gleichgewicht, indem Sie die zugehörige (stationäre) Fokker-Planck-Gleichung lösen.

(b) (3 Punkte) Wie groß ist im Gleichgewicht, die mittlere in der Spule gespeicherte Energie

$$\langle E_\mathrm{S}\rangle = \frac{L\langle J^2(t)\rangle}{2}.$$

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie die spektrale Leistungsdichte $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ der Stromfluktuationen und bestimmen Sie daraus die Impedanz $Z(\omega)$ des gesamten Stromkreises mithilfe der Green-Kubo-Formel

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{k_BT}\int_0^\infty e^{i\omega t}\langle J(0)J(t)\rangle\,dt.$$

Nützliche Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}\,dJ = \sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} J^2 e^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}\,dJ = \sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2+a^2}d\omega = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$$

3. Lineare Antwort und Kramers-Kronig Relationen (12 Punkte)

Betrachten Sie ein System im Gleichgewicht, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch eine plötzlich einwirkende Kraft $F_A(t)$ gestört wird. Die Kraft soll hinreichend schwach sein, sodass für die gemessene Observable $B(t)$ gilt

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t, t') F_A(t').$$

(a) (1 Punkte) Von welcher Variable hängt $\chi(t, t')$ im Gleichgewicht nur noch ab?

(b) (5 Punkte) Beweisen Sie, dass aufgrund von Kausalität die Pole von $\tilde{\chi}(\omega)$ in der unteren komplexen Halbebene liegen.
Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz.

(c) (3 Punkte) Die lineare Antwortfunktion ist eine reelle Größe. Welche Symmetrie folgt daraus für den Real- und Imaginärteil von $\tilde{\chi}(\omega)$? (Mit expliziter Herleitung.)

(d) (3 Punkte) Nehmen Sie an, dass der Realteil gegeben ist durch

$$\tilde{\chi}_r(\omega) = \begin{cases} a & \omega \in [-\omega_0, \omega_0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Der Imaginärteil erfüllt die Kramers-Kronig-Relation $\tilde{\chi}_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\tilde{\chi}_r(\omega')}{\omega' - \omega}$. Skizzieren Sie sowohl den Realteil als auch den Imaginärteil von $\tilde{\chi}(\omega)$.
Hinweis: Eine qualitativ richtige Skizze ist hinreichend, eine explizite Rechnung ist hier nicht verlangt. $\tilde{\chi}_i(\omega)$ divergiert bei $\pm\omega_0$.

Konvention:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega), \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\omega t} f(t),$$

4. Phasenübergänge und Magnetismus (12 Punkte)

(a) (4 Punkte) Betrachten Sie ein abgeschlossenes System bei dem von außen Temperatur T und Druck p konstant gehalten werden. Welches thermodynamische Potential wird im Gleichgewicht extremal? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder ein Maximum? (Fragen mit Herleitung beantworten.)

(b) (4 Punkte) Skizzieren Sie den Verlauf des thermodynamischen Potentials und der Entropie als Funktion der Temperatur bei einem Phasenübergang erster und zweiter Ordnung. Nehmen Sie an, dass dem System konstant Wärme zugeführt wird. Skizzieren Sie für beide Fälle den zeitlichen Temperaturverlauf am Phasenübergang.

(c) (4 Punkte) Betrachten Sie nun nicht-gekoppelte Spin-1/2-Teilchen auf einen Gitter. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch $\hat{H} = -\frac{\mu_B}{\hbar} B_{\text{ext}} g_s \sum_{i=1}^{N} S_i^z$, B_{ext} ist eine von außen angelegte magnetische Flussdichte, und das System steht mit einem Wärmebad der Temperatur T in Kontakt. Berechnen Sie das zugehörige thermodynamische Potential, und daraus die Magnetisierung. Skizzieren Sie die Magnetisierung als Funktion der Temperatur für endliches B_{ext}. Argumentieren Sie, ob es einen Phasenübergang bei endlichen Temperaturen gibt.