Name:
Matrikelnummer:
Zahl der abgegebenen Blätter:

Lösung zum Test - 28.6.2019

1. Gas im Schwerefeld mit homogener Dichte (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas aus N Teilchen der Masse m in einem Zylinder mit Radius R und Höhe H. Entlang der Zylinderachse (z-Achse) wirkt das Schwerefeld $V(x,y,z) = mgz$. Zwischen Boden und Deckel des Zylinders herrscht eine (kleine) Temperaturdifferenz ΔT, die so gewählt wird, dass sich eine **homogene** Dichte n_0 ergibt.

(a) (3 Punkte) Wie lautet die lokale Gleichgewichtsverteilung $f_1^{(0)}(z, \mathbf{p})$ des Gases?

Lösung:

Das allgemeine lokale Gleichgewicht ist gegeben durch

$$f_1^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = n(\mathbf{r},t)\left(\frac{\beta(\mathbf{r},t)}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\beta(\mathbf{r},t)}{2m}[\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)]^2}.$$

Im hier betrachteten Fall verschwindet die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0$, die Dichte ist homogen $n(\mathbf{r},t) = n_0$ und der Temperaturverlauf ist stationär $\beta(\mathbf{r},t) = \beta(z)$. Damit ergibt sich im vorliegenden Fall

$$f_1^{(0)}(z,\mathbf{p}) = n_0\left(\frac{\beta(z)}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(z)\frac{\mathbf{p}^2}{2m}}.$$

(b) (6 Punkte) Im Gleichgewicht verschwindet die mittlere Driftgeschwindigkeit $\langle v_z\rangle = 0$. Berechnen Sie mit der Relaxationszeitnäherung den Temperaturgradienten $\frac{dT}{dz}$ im Gas.
Hinweis: Für die Mittelwerte über $f_1^{(0)}$ gilt $\langle p_z^2\rangle_0 = n_0 m k_B T$ und $\langle \mathbf{p}^2 p_z^2\rangle_0 = 5n_0(mk_BT)^2$.

Lösung:

Innerhalb der Relaxationszeitnäherung lässt sich die 1-Teilchen Verteilungsfunktion approximieren durch

$$\begin{aligned} f_1 &\approx f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}}\left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}}\right) \\ &= f_1^{(0)} - \frac{3\tau_{\text{rel}}}{2\beta m}\frac{d\beta}{dz}p_z f_1^{(0)} + \frac{\tau_{\text{rel}}}{2m^2}\frac{d\beta}{dz}\mathbf{p}^2 p_z f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} g\beta p_z f_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht verschwindet der Teilchenstrom $j_z = n_0\langle v_z\rangle$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} j_z = \int \frac{p_z}{m} f_1 d^3p &= -\frac{3\tau_{\text{rel}}}{2\beta m^2}\frac{d\beta}{dz}\int p_z^2 f_1^{(0)} d^3p + \frac{\tau_{\text{rel}}}{2m^3}\frac{d\beta}{dz}\int \mathbf{p}^2 p_z^2 f_1^{(0)} d^3p - \frac{\tau_{\text{rel}}}{m} g\beta \int p_z^2 f_1^{(0)} d^3p \\ &= -\frac{3\tau_{\text{rel}} n_0}{2\beta^2 m}\frac{d\beta}{dz} + \frac{5\tau_{\text{rel}} n_0}{2m\beta^2}\frac{d\beta}{dz} - \tau_{\text{rel}} n_0 g \\ &= \frac{\tau_{\text{rel}} n_0}{\beta^2 m}\frac{d\beta}{dz} - \tau_{\text{rel}} n_0 g = -\tau_{\text{rel}} n_0\left(\frac{k_B}{m}\frac{\partial T}{\partial z} + g\right) = 0 \end{aligned}$$

und weiters

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{mg}{k_B}.$$

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie für ein ideales Gas, dass die resultierende Kraft F, die das Gas auf den Zylinder ausübt, gegeben ist durch $F = Nmg$.
Hinweis: Denken Sie einfach und verwenden Sie die thermische Zustandsgleichung.

Lösung:

Die resultierende Kraft auf den Zylinder ist $F = \pi R^2(P_B - P_D)$, wobei P_B den Druck auf den Boden und P_D den Druck auf den Deckel des Zylinders bezeichnet. Mit der thermischen Zustandsgleichung $P = n_0 k_B T$ ergibt sich weiter

$$F = \pi R^2 n_0 k_B (T_B - T_D) = N k_B \frac{T_B - T_D}{H} = -N k_B \frac{dT}{dz} = Nmg.$$

In konsistenter Weise entspricht dies genau der Gewichtskraft aller N Teilchen.

2. Wärmerauschen im Stromkreis mit Spule (14 Punkte)

Betrachten Sie einen Stromkreis bestehend aus einer Spule mit Induktivität L und einem Widerstand R bei Temperatur T. Durch die thermischen Spannungsfluktuationen am Widerstand wird im Stromkreis ein Strom $J(t)$ induziert, der durch die stochastische Differentialgleichung

$$L \frac{d}{dt} J(t) + RJ(t) = \sqrt{2Rk_BT}\, \xi(t)$$

beschrieben werden kann, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ ungerichtet $\langle \xi(t) \rangle = 0$, unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ und normalverteilt ist.

(a) (5 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_\infty(J)$ im Gleichgewicht, indem Sie die zugehörige (stationäre) Fokker-Planck-Gleichung lösen.

Lösung:

Die zugehörige (stationäre) Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_\infty(J)$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial w_\infty}{\partial t} = \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial J}(J w_\infty) + \frac{R k_B T}{L^2} \frac{\partial^2 w_\infty}{\partial J^2} = \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial J} \left(J w_\infty + \frac{k_B T}{L} \frac{\partial w_\infty}{\partial J} \right) = 0.$$

Mit $\sigma^2 = \frac{k_B T}{L}$ folgt für die stationäre Lösung $w_\infty(J)$ die Gleichung

$$-J w_\infty = \sigma^2 \frac{\partial w_\infty}{\partial J}$$

deren (normierte) Lösung gegeben ist durch

$$w_\infty(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}.$$

(b) (3 Punkte) Wie groß ist im Gleichgewicht, die mittlere in der Spule gespeicherte Energie

$$\langle E_\mathrm{S} \rangle = \frac{L \langle J^2(t) \rangle}{2}.$$

Lösung:

Im Gleichgewicht gilt

$$\langle E_\mathrm{S} \rangle = \frac{L}{2} \langle J^2(t) \rangle = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J^2 w_\infty(J) dJ = \frac{L\sigma^2}{2} = \frac{k_B T}{2}.$$

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie die spektrale Leistungsdichte $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ der Stromfluktuationen und bestimmen Sie daraus die Impedanz $Z(\omega)$ des gesamten Stromkreises mithilfe der Green-Kubo-Formel

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle J(0)J(t)\rangle \, dt.$$

Lösung:

Verwendet man die Definition der abgeschnittenen Fourier-Transformation

$$\tilde{J}_T(\omega) = \int_T J(t) e^{i\omega t} dt$$

und betrachtet das Betragsquadrat, folgt aus der stochastischen Differentialgleichung

$$\left(L^2\omega^2 + R^2\right) |\tilde{J}_T(\omega)|^2 = 2Rk_B T |\tilde{\xi}_T(\omega)|^2.$$

Der Zusammenhang zwischen $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ und $\tilde{C}_{\xi\xi}(\omega)$ lässt sich mit dem Wiener-Chintschin-Theorem herstellen

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{JJ}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{J}_T(\omega)|^2}{T} &= \frac{2Rk_BT}{L^2\omega^2 + R^2} \lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{\xi}_T(\omega)|^2}{T} \\ &= \frac{2Rk_BT}{L^2\omega^2 + R^2} \tilde{C}_{\xi\xi}(\omega) \\ &= \frac{2Rk_BT}{L^2\omega^2 + R^2},\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C}_{\xi\xi}(\omega) = 1$ verwendet wurde. Durch Rücktransformation erhält man

$$\begin{aligned}C_{JJ}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{JJ}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{2Rk_BT}{L^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}} d\omega \\ &= \frac{k_BT}{L} e^{-\frac{R}{L}|t|}\end{aligned}$$

und durch einsetzen in die Green-Kubo-Formel

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{k_BT} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle J(0)J(t)\rangle \, dt = \frac{1}{L} \int_0^\infty e^{i\omega t - \frac{R}{L}t} \, dt = \frac{1}{R - i\omega L}.$$

Die Impedanz ist also gegeben durch $Z(\omega) = R - i\omega L$.

Nützliche Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}} dJ = \sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} J^2 e^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}} dJ = \sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$