

1. Plenum Statistische Physik II UE, 11.03.2019

1. Effusion ins Vakuum

Ein isolierter Behälter mit Volumen V sei gefüllt mit idealem Gas der Teilchenmasse m . In der Behälterwand befinde sich ein Loch mit Fläche A dessen Durchmesser sehr viel kleiner als die mittlere freie Weglänge ist. Durch dieses Loch können Teilchen in das umgebende Vakuum austreten (effundieren). Anfänglich sei die Teilchendichte n_0 und die Temperatur T_0 .

- Wie viele Teilchen mit Impuls \mathbf{p} verlassen pro Zeiteinheit den Behälter?
- Berechnen Sie den gesamten austretenden Teilchenstrom. Wie viel Energie und wie viel Impuls fließt dabei pro Zeiteinheit durchs Loch?
- Wie groß ist die mittlere Energie eines Teilchens im austretenden Strahl, im Vergleich zur mittleren Energie im Behälter?
- Berechnen Sie den Druck $P(t)$ und die Temperatur $T(t)$ im Inneren des Behälters als Funktion der Zeit.
- Berechnen Sie erneut den Druck $P(t)$, wenn der Behälter durch ein externes Wärmereservoir auf konstanter Temperatur gehalten wird. Wie groß ist der zuströmende Wärmefluss?

2. Viskoses Gas in Rotation

Ein zylindrischer Behälter mit Radius R und Höhe H rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω . Im Behälter befinde sich ein Gas mit Viskosität η . Das Gas kann in diesem Geschwindigkeitsbereich als inkompressible angenommen werden. Die Navier-Stokes Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

ergibt sich aus der Impulsbilanz der Boltzmann Gleichung (siehe Vorlesung), wobei der Drucktensor (auch Spannungstensor genannt) für inkompressible Fluide gegeben ist durch

$$\sigma_{ij} = P\delta_{ij} - \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

- Vereinfachen Sie die Navier-Stokes Gleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) für ein rotationssymmetrisches Geschwindigkeitsfeld $u_\varphi(r)$ mit $u_r = u_z = 0$.
- Zeigen Sie, dass das stationäre Geschwindigkeitsfeld $u_\varphi(r) = \omega r$ die Navier-Stokes Gleichung erfüllt und berechnen Sie den Druck $P(r)$.