Ergänzung zum 1. Plenum Statistische Physik II UE, 11.03.2019

1. **Viskoses Gas in Rotation**

   Ein zylindrischer Behälter mit Radius R und Höhe H rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω. Im Behälter befinde sich ein Gas mit Viskosität η dessen Geschwindigkeitsfeld gegeben ist durch $u_\varphi(r) = \omega r$ mit $u_r = u_z = 0$. Nun wird der Behälter abrupt auf $\omega = 0$ abgebremst. Berechnen Sie das zeitabhängige Drehmoment, welches das im Inneren rotierende Gas auf die Wand des Behälters ausübt.

   Lösung: Die Dynamik des Geschwindigkeitsfelds wird beschrieben durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right).$$

Diese lässt sich mit dem Produktansatz $u_\varphi(r,t) = T(t)R(r)$ separieren. Einsetzten liefert

$$\frac{1}{T}\frac{\rho}{\eta}T' = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{R}{r^2}\right) = \text{const} = -\lambda^2.$$

Daraus folgt

$$T(t) = Ce^{-\frac{\lambda^2\eta}{\rho}t}$$

und

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R - R = 0.$$

Eine sehr ähnliche Gleichung

$$\xi^2 J_1'' + \xi J_1' + \xi^2 J_1 - J_1 = 0$$

wird durch die Bessel Funktion $J_1(\xi)$ erfüllt. Mithilfe der Variablentransformation $\xi = \lambda r$ sieht man, dass die Funktion $R(r) = J_1(\lambda r)$ den radial Anteil des Separationsansatzes löst.
Weil die Behälterwand bei $r = R$ still steht und keine Relativgeschwindigkeit zwischen Gas und Wand erlaubt ist (no-slip condition), muss die Randbedingung $R(R) = J_1(\lambda R) = 0$ erfüllt sein. Mögliche Werte für λ werden also auf die diskreten Werte $\lambda_i = \frac{\mu_i}{R}$ eingeschränkt, wobei $\mu_{i\in\{1,2\ldots\}}$ die Nullstellen der Besselfunktion J_1 sind.
Die allgemeine Lösung für das Geschwindigkeitsfeld lässt sich schreiben als

$$u_\varphi(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_1(\lambda_i r) e^{-\frac{\lambda_i^2\eta}{\rho}t}.$$

Die Koeffizienten C_i folgen aus der Anfangsbedingung $u_\varphi(r,0) = \omega r$. Nun bleibt noch die Frage wie die Koeffizienten C_i zu bestimmen sind. Tatsächlich lässt sich dies ganz analog zur Bestimmung der Koeffizienten bei Fourier Reihen durchführen. Hierfür verwendet man die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{r=0}^{R} rJ_1(\lambda_i r)J_1(\lambda_j r)dr = \frac{1}{2}\big(RJ_1'(\lambda_i R)\big)^2\delta_{ij}.$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten zu

$$C_i = \frac{2}{\big(RJ_1'(\lambda_i R)\big)^2}\int_{r=0}^{R} \omega r^2 J_1(\lambda_i r)dr.$$

Um dieses Integral zu lösen kann die folgende Relation (ohne Beweis) verwendet werden

$$\int_0^{\mu_i} \xi^2 J_1(\xi)d\xi = \mu_i^2 J_1'(\mu_i)$$

und man erhält

$$C_i = \frac{2\omega}{\lambda_i J_1'(\lambda_i R)}.$$

Die Kraftübertragung auf ein Flächenelement der Behälterwand wird bestimmt durch den vorhandenen Gradienten im Geschwindigkeitsfeld. Genauer gesagt steht die Schubspannung $\sigma_{\varphi r}$ (tangentiale Kraft in φ Richtung pro Fläche) in linearer Beziehung zur Schergeschwindigkeit

$$\sigma_{\varphi r} = \eta\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}.$$

Das gesamte Drehmoment auf die Behälterwand folgt aus der Schubspannung mit

$$M = \int_{\text{Wand}} R\sigma_{\varphi r}dA = 2\pi R^2 H\sigma_{\varphi r}.$$

Daraus folgt für das Zeitabhängige Drehmoment

$$\begin{aligned}
M(t) =& 2\pi R^2 H\eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} \\
=& 2\pi R^2 H\eta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\lambda_i J_1'(\lambda_i R)}\lambda_i J_1'(\lambda_i R)e^{-\frac{\lambda_i^2\eta}{\rho}t} \\
=& 4\pi\omega R^2 H\eta \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_i^2\eta}{\rho}t}.
\end{aligned}$$