Lösungen zum 1. Plenum Statistische Physik II UE, 11.03.2019

1. **Effusion ins Vakuum**

   Ein isolierter Behälter mit Volumen V sei gefüllt mit idealem Gas der Teilchenmasse m. In der Behälterwand befinde sich ein Loch mit Fläche A dessen Durchmesser sehr viel kleiner als die mittlere freie Weglänge ist. Durch dieses Loch können Teilchen in das umgebendes Vakuum austreten (effundieren). Anfänglich sei die Teilchendichte n_0 und die Temperatur T_0.

   a) Wie viele Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ verlassen pro Zeiteinheit den Behälter?

   Lösung: Stellt man sich eine kleine Fläche $d\mathbf{A}$ im Gas vor, so ist die Anzahl an Teilchen die im Gas pro Zeiteinheit mit Impuls $\mathbf{p}$ durch diese Fläche fliegen gegeben durch

   $$d\dot{N}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{m} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, d\mathbf{A}\, d^3p,$$

   mit der Gleichgewichtsverteilung

   $$f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = n \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}$$

   Wenn sich die Fläche an der Wand in x Richtung befindet, dann ist die Anzahl an Teilchen die pro Zeiteinheit den Behälter mit Impuls $\mathbf{p}$ verlassen gegeben durch

   $$d\dot{N}_{\text{out}}(\mathbf{p}) = \frac{p_x}{m} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, A\, d^3p.$$

   b) Berechnen Sie den gesamten austretenden Teilchenstrom. Wie viel Energie fließt dabei pro Zeiteinheit durchs Loch?

   Lösung: Der gesamte Teilchenstrom ist gegeben durch das entsprechende Integral

   $$\dot{N}_{\text{out}} = \int\limits_{p_x>0} d\dot{N}_{\text{out}}(\mathbf{p}) = A \int\limits_{p_x>0} \frac{p_x}{m} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, d^3p = An\sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} = \frac{1}{4} n\langle v\rangle A,$$

   mit

   $$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

   Der Energiestrom berechnet sich analog zu

   $$\dot{E}_{\text{out}} = \int\limits_{p_x>0} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} d\dot{N}_{\text{out}}(\mathbf{p}) = A \int\limits_{p_x>0} \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\frac{p_x}{m} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})\, d^3p = An\sqrt{\frac{2(k_B T)^3}{\pi m}} = \frac{k_B T}{2} n\langle v\rangle A.$$

c) Wie groß ist die mittlere Energie eines Teilchens im austretenden Strahl, im Vergleich zur mittleren Energie im Behälter?

Lösung: Die mittlere kinetische Energie pro Teilchen im Effusionsstrahl berechnet sich zu

$$\langle \varepsilon_{\text{Strahl}} \rangle = \frac{\dot{E}_{\text{out}}}{\dot{N}} = 2k_B T$$

Die mittlere kinetische Energie pro Teilchen im Gas ist hingegen "nur"

$$\langle \varepsilon_{\text{Gas}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

d) Berechnen sie den Druck $P(t)$ und die Temperatur $T(t)$ im Inneren des Behälters als Funktion der Zeit.

Lösung: Die Änderung der Teilchendichte im Behälter ist

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\dot{N}}{V} = -\frac{A}{V}\sqrt{\frac{k_B}{2\pi m}} n(t)\sqrt{T(t)} = -c\, n(t)\sqrt{T(t)},$$

mit $c = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{k_B}{2\pi m}}$. Die Änderung der Temperatur ergibt sich aus

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3k_B}{2} n(t)T(t)\right] = -\frac{\dot{E}}{V} = -\frac{A}{V} n(t)\sqrt{\frac{2(k_B T)^3}{\pi m}} = -2c\, k_B\, n(t)\sqrt{T^3(t)}$$

zu

$$\frac{3k_B}{2} n(t)\frac{dT}{dt} = -2c\, k_B\, n(t)\sqrt{T^3(t)} + \frac{3k_B}{2} c\, n(t)\sqrt{T^3(t)}$$

und dann

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3} c\, \sqrt{T^3(t)}.$$

Beide Differentialgleichungen lassen sich einfach über Trennung der Veränderlichen lösen

$$\int T^{-\frac{3}{2}}\, dT = -\int \frac{c}{3} dt \Rightarrow 2T^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{3}t + C \Rightarrow T(t) = \frac{T_0}{(1+\frac{tc\sqrt{T_0}}{6})^2}$$

und

$$\int n^{-1}\, dn = -\int \frac{c\sqrt{T_0}}{1+\frac{tc\sqrt{T_0}}{6}} dt \Rightarrow \ln(n) = -6\ln(1+\frac{tc\sqrt{T_0}}{6}) + C \Rightarrow n(t) = \frac{n_0}{(1+\frac{tc\sqrt{T_0}}{6})^6}.$$

Der zeitabhängige Druck berechnet sich zu

$$P(t) = k_B n(t) T(t) = \frac{k_B n_0 T_0}{(1+\frac{tc\sqrt{T_0}}{6})^8}$$

e) Berechnen Sie erneut den Druck $P(t)$, wenn der Behälter durch ein externes Wärmereservoir auf konstanter Temperatur gehalten wird. Wie groß ist der zuströmende Wärmefluss?

Lösung: Wenn die Temperatur im Behälter konstant gehalten wird folgt aus

$$\frac{dn}{dt} = -c\,n(t)\sqrt{T_0} \Rightarrow n(t) = n_0 e^{-tc\sqrt{T_0}}$$

für den Druck

$$p(t) = p_0 e^{-tc\sqrt{T_0}}$$

Die Wärmemenge die zugeführt werden muss ergibt sich zu

$$\dot{Q} = \dot{E}_{\text{out}} - \frac{3k_B T_0}{2}\dot{N}_{\text{out}} = \frac{k_B T_0}{2} n\langle v\rangle A - \frac{3k_B T_0}{8} n\langle v\rangle A = \frac{k_B T_0}{8} n_0 \langle v\rangle A e^{-tc\sqrt{T_0}}$$

2. **Viskoses Gas in Rotation**

Ein zylindrischer Behälter mit Radius R und Höhe H rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω. Im Behälter befinde sich ein Gas mit Viskosität η. Das Gas kann in diesem Geschwindigkeitsbereich als inkompressible angenommen werden. Die Navier-Stockes Gleichung

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right) = -\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

ergibt sich aus der Impulsbilanz der Boltzmann Gleichung (siehe Vorlesung), wobei der Drucktensor (auch Spannungstensor genannt) für inkompressible Fluide gegeben ist durch

$$\sigma_{ij} = P\delta_{ij} - \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

a) Vereinfachen Sie die Navier-Stokes Gleichung in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) für ein rotationssymmetrisches Geschwindigkeitsfeld $u_\varphi(r)$ mit $u_r = u_z = 0$.

Lösung: Einsetzten des Spannungstensors in die Impulsbilanz der Boltzmann Gleichung ergibt unter Verwendung von $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ (inkompressible Strömung) die folgende Gleichung

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right) = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{u}.$$

In Zylinderkoordinaten kann das Geschwindigkeitsfeld der Strömung geschrieben werden als

$$\mathbf{u} = u_\varphi(r,t)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Der Laplace Operator und der Gradient lauten

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2$$
$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r}\partial_\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}\partial_z.$$

In krummlinigen Koordinaten muss beim Auswerten von Differentialoperatoren auch die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren berücksichtigen. In Zylinderkoordinaten erhält man

$$\begin{array}{lll} \partial_r\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = 0 & \partial_r\hat{\mathbf{e}}_\varphi = 0 & \partial_r\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} = 0 \\ \partial_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi & \partial_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} & \partial_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} = 0 \\ \partial_z\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = 0 & \partial_z\hat{\mathbf{e}}_\varphi = 0 & \partial_z\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} = 0. \end{array}$$

Für den konvektiven Anteil erhält man aufgrund der Orthogonalität der Basisvektoren

$$\mathbf{u}\cdot\nabla = u_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi\cdot\nabla = \frac{u_\varphi}{r}\partial_\varphi.$$

Die linke Seite der Navier-Stokes Gleichungen vereinfacht sich also zu

$$\rho\Big(\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\Big) = \rho\partial_t u_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho\frac{u_\varphi}{r}\partial_\varphi[u_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi] = \rho\partial_t u_\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \rho\frac{u_\varphi^2}{r}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}.$$

Für die rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned} -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{u} &= -\partial_r P\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \eta\Big(\partial_r^2[u_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi] + \frac{1}{r}\partial_r[u_\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi] + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2[u_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi]\Big) \\ &= -\partial_r P\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \eta\Big(\partial_r^2 u_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2}\Big)\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned}$$

Gleichsetzen beider Seiten liefert aus

$$0 = \Big(\rho\frac{u_\varphi^2}{r} - \partial_r P\Big)\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \eta\Big(\frac{\rho}{\eta}\partial_t u_\varphi + \partial_r^2 u_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2}\Big)\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho\, u_\varphi^2}{r}.$$

b) Zeigen Sie, dass das stationäre Geschwindigkeitsfeld $u_\varphi(r) = \omega r$ die Navier-Stokes Gleichung erfüllt und berechnen Sie den Druck $P(r)$.

Lösung: Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichung liefert

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} = \frac{\omega}{r} - \frac{\omega}{r} = 0$$

und weiters für den Druck

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho\, u_\varphi^2}{r} = \rho\omega^2 r \Rightarrow P(r) = \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2.$$

Der Gradient des Drucks kann als Nettokraft $dF = \frac{\partial P}{\partial r} dV$ auf ein kleines Volumselement dV mit Masse $dM = \rho dV$ verstanden werden. Die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial r} dV = dM\omega^2 r$$

beschreibt dann einfach das Kräftegleichgewicht zwischen Zentripetalkraft $\frac{\partial P}{\partial r} dV$ und Zentrifugalkraft $dM\omega^2 r$.