Lösungen zum 2. Plenum Statistische Physik II UE, 01.04.2019

1. **Gas im Kraftfeld**

   Betrachten Sie ein Gas mit einheitlicher Temperatur T, das sich in einem linearen Potential $V(x) = -xF_x$ befindet. Die lokale Gleichgewichtsverteilung des Gases sei gegeben durch

$$f_1^{(0)}(x, \mathbf{p}) = n(x) \left(\frac{\beta}{2m\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}.$$

   a) In einem offenen System in dem konstant Teilchen zu- und abgeführt werden bleibt die Dichte konstant $n(x) = n_0$. Das Kraftfeld erzeugt dabei eine mittlere Driftgeschwindigkeit $\langle v_x \rangle$. Berechnen Sie die Beweglichkeit $\mu = \langle v_x \rangle / F_x$ mithilfe der Relaxationszeitnäherung.

   Lösung:

   Innerhalb der Relaxationszeitnäherung lässt sich die 1-Teilchen Verteilungsfunktion approximieren durch

$$\begin{aligned} f_1 &\approx f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} \left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &= f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} F_x \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial p_x} = f_1^{(0)} + \tau_{\text{rel}} F_x \beta \frac{p_x}{m} f_1^{(0)}. \end{aligned}$$

   Der durch das Kraftfeld induzierte Teilchenstrom $j_x = n_0 \langle v_x \rangle$ folgt aus

$$j_x = \int \frac{p_x}{m} f_1 d^3p = \frac{1}{m} \int p_x f_1^{(0)} d^3p + \frac{\tau_{\text{rel}} F_x \beta}{m^2} \int p_x^2 f_1^{(0)} d^3p = \frac{\tau_{\text{rel}} F_x n_0}{m},$$

   wobei wir

$$\int p_x f_1^{(0)} d^3p = 0 \qquad \text{und} \qquad \int p_x^2 f_1^{(0)} d^3p = \frac{n_0 m}{\beta}$$

   verwendet haben. Die Beweglichkeit

$$\mu = \frac{\langle v_x \rangle}{F_x} = \frac{j_x}{n_0 F_x} = \frac{\tau_{\text{rel}}}{m}$$

   lässt sich nun einfach ablesen.

b) In einem geschlossenen System baut sich ein Dichtegradient auf, der die Driftbewegung kompensiert. Berechnen Sie aus der Gleichgewichtsbedingung $\langle v_x \rangle = 0$ einen Zusammenhang zwischen F_x und $\frac{dn}{dx}$. Wie groß ist der Diffusionskoeffizient D?

Lösung:

Mit einer ortsabhängigen Dichte ergibt die Relaxationszeitnäherung für die 1-Teilchen Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} f_1 &\approx f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &= f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \frac{p_x}{m} f_1^{(0)} + \tau_{\mathrm{rel}} F_x \beta \frac{p_x}{m} f_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Im stationären Fall muss der vom Kraftfeld induzierte Teilchenstrom vom Diffusionsstrom des Dichtegradienten kompensiert werden. Aus der Gleichgewichtsbedingung $j_x = 0$ folgt

$$j_x = \int \frac{p_x}{m} f_1 d^3p = -\tau_{\mathrm{rel}} \left(\frac{1}{m\beta} \frac{dn}{dx} - \frac{n}{m} F_x \right) = 0,$$

woraus $\frac{dn}{dx} = \beta n F_x$ folgt. Der Diffusionskoeffizient D ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Diffusionsstrom und dem Dichtegradient

$$j_x^D = -D \frac{dn}{dx} = -\frac{\tau_{\mathrm{rel}}}{m\beta} \frac{dn}{dx},$$

also $D = \frac{\tau_{\mathrm{rel}}}{m\beta}$. Wie man sieht ist die Einstein-Smoluchowski Gleichung zwischen Diffusionskoeffizienten D und Beweglichkeit μ

$$D = \mu k_B T$$

erfüllt.

c) Bestimmen Sie die Dichteverteilung $n(x)$.

Lösung:

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{dn}{dx} = \beta n F_x$ folgt durch Integration

$$n(x) = n_0 e^{\beta x F_x} = n_0 e^{-\beta V(x)}$$

2. **Gas mit Temperaturgradient**

Betrachten Sie ein Gas mit Teilchenmasse m in einem Zylinder mit Länge L und Radius R. Die beiden Enden des Zylinders werden auf unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 gehalten.

a) Wie hängt die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{5}{2}\frac{\tau_{\text{rel}} n T k_B^2}{m}$$

von der Temperatur ab, wenn Sie die Relaxationszeit τ_{rel} durch die Stoßzeit τ approximieren.

Lösung:

Mit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d_{\text{W}}^2} = \frac{\sqrt{m}}{4\sqrt{\pi k_B T} n d_{\text{W}}^2}$$

erhält man

$$\kappa = \frac{5}{2}\frac{\tau_{\text{rel}} n T k_B^2}{m} \approx \frac{5}{2}\frac{\tau n T k_B^2}{m} = \frac{5}{8}\frac{n T k_B^2}{\sqrt{\pi m k_B T} n d_{\text{W}}^2} = \frac{5 k_B}{8 d_{\text{W}}^2}\sqrt{\frac{T k_B}{\pi m}}.$$

b) Berechnen Sie den Temperaturverlauf im Zylinder.

Lösung:

Die x-Achse sei als Zylinderachse gewählt. In einem stationären Zustand verschwindet die Divergenz der Wärmestromdichte

$$\text{div}(j_Q) = -\text{div}(\kappa \nabla T) = \frac{d}{dx}\left(\kappa(T)\frac{dT}{dx}\right) = \frac{d\kappa}{dT}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + \kappa(T)\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

In die Berechnung des Temperaturverlaufs $T(x)$ geht also nicht direkt die Wärmeleitfähigkeit, sondern „nur" die Größe

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dT} = \frac{1}{2T}$$

ein. Die zu lösende Differentialgleichung lautet

$$T\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2.$$

Der allgemeine Potenzansatz

$$T(x) = C_1(1 + C_2 x)^s$$

führt auf

$$s(s-1)C_1^2 C_2^2 (1+C_2 x)^{2s-2} = -\frac{s^2}{2} C_1^2 C_2^2 (1+C_2 x)^{2s-2} \Longrightarrow s\left(\frac{3s}{2} - 1\right) = 0 \Longrightarrow s = \frac{2}{3}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Randbedingungen $T(0) = T_1$ und $T(L) = T_2$ zu

$$C_1 = T_1 \qquad\qquad C_2 = \frac{1}{L}\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Für die Berechnung der Wärmestromdichte bei $x = 0$ ist der Gradient von Bedeutung

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2}{3}C_1C_2 = \frac{2T_1}{3L}\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Für kleine Temperaturunterschiede $\Delta T = T_2 - T_1$ lässt sich der Gradient approximieren durch

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2T_1}{3L}\left(\left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) \approx \frac{2T_1}{3L}\left(\frac{3}{2}\frac{\Delta T}{T_1}\right) = \frac{\Delta T}{L}.$$