3. Plenum Statistische Physik II UE, 06.05.2019

1. **Standard-Wiener-Prozess**

   Der Standard-Wiener-Prozess $W(t)$, oft einfach nur Wiener-Prozess genannt, ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

   $$\dot{W}(t) = \xi(t)$$

   zur Anfangsbedingung $W(0) = 0$, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt ist.

   a) Berechnen Sie für den Wiener Prozess die Momente $\langle W^n(t)\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Theorem von Isserlis

   $$\big\langle \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_{2k})\big\rangle = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{2k}} \prod_{i=1}^{k} \big\langle \xi(t_{\sigma_{2i-1}})\xi(t_{\sigma_{2i}})\big\rangle,$$

   wobei über alle Permutationen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{2k})$ der Zahlen $\{1, 2, ..., 2k\}$ summiert wird.

   b) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W,t)$ mit Hilfe der Momente $\langle W^n(t)\rangle$.

   c) Zeigen Sie, dass es sich bei $w(W,t)$ um eine Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung handelt.

2. **Vertiefung zum Thema stochastische Differentialgleichungen**

   Gegeben sei die folgende stochastische Differentialgleichung

   $$\dot{Y}(t) = -aY(t) + b\xi(t),$$

   wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt ist.

   a) Zeigen Sie, dass die Lösung für $Y(t)$ geschrieben werden kann als

   $$Y(t) = e^{-at}Y(0) + e^{-at}W\left(\frac{b^2}{2a}(e^{2at}-1)\right),$$

   wobei $W(t)$ ein Standard-Wiener-Prozess ist.
   Hinweis: Es gilt $\xi(g(t)) = \xi(t)\sqrt{\frac{1}{\dot{g}(t)}}$

   b) Verwenden Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W,t)$ des Wiener Prozesses, um die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(Y,t)$ zu berechnen.

   c) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit $P(Y_n, t_n | Y_{n-1}, t_{n-1})$ und zeigen Sie, dass jede Anfangsverteilung $w_0(Y) = w(Y,0)$ im Grenzfall $t \to \infty$ gegen die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $w_\infty(Y)$ strebt.