Lösungen zum 3. Plenum Statistische Physik II UE, 06.05.2019

1. **Standard-Wiener-Prozess**

   Der Standard-Wiener-Prozess $W(t)$, oft einfach nur Wiener-Prozess genannt, ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

   $$\dot{W}(t) = \xi(t)$$

   zur Anfangsbedingung $W(0) = 0$, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t - t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt ist.

   a) Berechnen Sie für den Wiener Prozess die Momente $\langle W^n(t)\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Theorem von Isserlis

   $$\big\langle \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_{2k})\big\rangle = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{2k}} \prod_{i=1}^{k} \big\langle \xi(t_{\sigma_{2i-1}})\xi(t_{\sigma_{2i}})\big\rangle,$$

   wobei über alle Permutationen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{2k})$ der Zahlen $\{1, 2, ..., 2k\}$ summiert wird.

   Lösung:

   Die Lösung der Differentialgleichung erhält man formal durch Integration

   $$W(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau.$$

   Aufgrund der Symmetrie der Differentialgleichung kann man bereits erkennen, dass die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W, t)$ eine symmetrische Funktion in W sein muss $w(W, t) = w(-W, t)$. Daraus folgt sofort, dass die ungeraden Momente verschwinden

   $$\langle W^{2k-1}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W^{2k-1} w(W, t)dW = 0.$$

   Um die geraden Momente $\langle W^{2k}(t)\rangle$ zu bestimmen, berechnet man zunächst

   $$\langle W^{2k}(t)\rangle = \int_0^t \int_0^t ... \int_0^t \langle \xi(\tau_1)\xi(\tau_2)...\xi(\tau_{2k})\rangle d\tau_1 d\tau_2 ... d\tau_{2k}.$$

   Einsetzten des Theorems von Isserlis liefert

   $$\begin{aligned}\langle W^{2k}(t)\rangle &= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{2k}} \prod_{i=1}^{k} \int_0^t \int_0^t \big\langle \xi(\tau_{\sigma_{2i-1}})\xi(\tau_{\sigma_{2i}})\big\rangle d\tau_{\sigma_{2i-1}} d\tau_{\sigma_{2i}} \\ &= \frac{(2k)!}{k!2^k} t^k,\end{aligned}$$

   wobei $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t - t')$ benützt wurde und die Tatsache, dass es $(2k)!$ Permutationen der Zahlen $\{1, 2, ..., 2k\}$ gibt.

b) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W,t)$ mit Hilfe der Momente $\langle W^n(t)\rangle$.

Lösung:

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W,t)$ zu berechnen, berechnet man zunächst die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}
c(\omega,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(W,t)e^{i\omega W}dW \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\omega)^n}{n!}\langle W^n(t)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^k}{(2k)!}\langle W^{2k}(t)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^k}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!2^k}t^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\omega^2}{2}t\right)^k = e^{-\frac{\omega^2}{2}t}
\end{aligned}$$

Durch Rücktransformation erhält man

$$\begin{aligned}
w(W,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega,t)e^{-i\omega W}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}t-i\omega W}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\omega\sqrt{\frac{t}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2t}}W\right)^2-\frac{W^2}{2t}}d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{W^2}{2t}},
\end{aligned}$$

es handelt sich also um eine Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{t}$.

c) Zeigen Sie, dass es sich bei $w(W,t)$ um eine Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung handelt.

Lösung: Die zugehörige Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial W^2}$$

ist äquivalent zur Diffusionsgleichung mit $D = \frac{1}{2}$. Durch Einsetzen erkennt man, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt (siehe 3.Tutorium Beispiel 4).

2. **Vertiefung zum Thema stochastische Differentialgleichungen**

Gegeben sei die folgende stochastische Differentialgleichung

$$\dot{Y}(t) = -aY(t) + b\xi(t),$$

wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt ist.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung für $Y(t)$ geschrieben werden kann als

$$Y(t) = e^{-at}Y(0) + e^{-at}W\left(\frac{b^2}{2a}(e^{2at}-1)\right),$$

wobei $W(t)$ ein Standard-Wiener-Prozess ist.

Hinweis: Es gilt $\xi(g(t)) = \xi(t)\sqrt{\frac{1}{\dot{g}(t)}}$

Lösung:

Unter Verwendung der Formel im Hinweis ergibt sich

$$\frac{d}{dt}W(g(t)) = \dot{g}(t)\dot{W}(g(t)) = \dot{g}(t)\xi(g(t)) = \sqrt{\dot{g}(t)}\xi(t).$$

Für allgemeine Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ mit $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$ ist also durch

$$Y(t) = f(t)Y(0) + f(t)W(g(t))$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= \dot{f}(t)Y(0) + \dot{f}(t)W(g(t)) + f(t)\sqrt{\dot{g}(t)}\xi(t)\\ &= \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}Y(t) + f(t)\sqrt{\dot{g}(t)}\xi(t),\end{aligned}$$

gegeben. Durch Vergleich mit der zu lösenden Differentialgleichung erhält man die folgenden Gleichungen

$$\dot{f}(t) = -af(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{g}(t) = \frac{b^2}{f(t)^2},$$

deren Lösung gegeben ist durch

$$f(t) = e^{-at} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \frac{b^2}{2a}\left(e^{2at}-1\right).$$

Bemerkung:

Die Formel im Hinweis lässt sich wie folgt beweisen: Sei

$$\tilde{\xi}(t) = \sqrt{\dot{g}(t)}\,\xi(g(t))$$

dann ist auch $\tilde{\xi}(t)$ normalverteilt und es gilt $\langle \tilde{\xi}(t) \rangle = 0$, sowie

$$\langle \tilde{\xi}(t)\tilde{\xi}(t') \rangle = \dot{g}(t)\langle \xi(g(t))\xi(g(t')) \rangle = \dot{g}(t)\Big(\delta\big(g(t) - g(t')\big)\Big) = \delta(t - t').$$

Weil $\tilde{\xi}(t)$ auch normalverteilt ist, mit gleichem Mittelwert und Varianz wie $\xi(t)$, handelt es sich um den gleichen Prozess

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t).$$

b) Verwenden Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(W, t)$ des Wiener Prozesses, um die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(Y, t)$ zu berechnen.

Lösung:

Allgemein gilt: Sei X eine normalverteilte Zufallszahl mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ, dann ist $X' = \alpha + \beta X$ ebenfalls normalverteilt mit Mittelwert $\mu' = \alpha + \mu$ und Standardabweichung $\sigma' = \beta\sigma$. Wie im ersten Beispiel gezeigt wurde ist $W(t)$ normalverteilt

$$w(W, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{W^2}{2t}},$$

mit Mittelwert $\mu_W = 0$ und Standardabweichung $\sigma_W(t) = \sqrt{t}$. Demnach ist auch die Lösung

$$Y(t) = e^{-at}Y(0) + e^{-at}W\left(\frac{b^2}{2a}\left(e^{2at} - 1\right)\right)$$

normalverteilt

$$w(Y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(Y-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

mit Mittelwert $\mu(t) = e^{-at}Y(0)$ und Standardabweichung $\sigma(t) = \sqrt{\frac{b^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)}$.

c) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit $P(Y_n, t_n|Y_{n-1}, t_{n-1})$ und zeigen Sie, dass jede Anfangsverteilung $w_0(Y) = w(Y, 0)$ im Grenzfall $t \to \infty$ gegen die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $w_\infty(Y)$ strebt.

Lösung:

Die Transferwahrscheinlichkeit $P(Y_n, t_n|Y_{n-1}, t_{n-1})$ ist mit $t = t_n - t_{n-1}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(Y_n, t_n|Y_{n-1}, t_{n-1}) &= P(Y_n, t, Y_{n-1}, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left(Y_n - e^{-at}Y_{n-1}\right)^2}. \end{aligned}$$

Die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_0(Y)$ ist demnach

$$w(Y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y, t|Y', 0) w_0(Y') dY'.$$

Im Grenzfall $t \to \infty$ gilt

$$w_\infty(Y) = \lim_{t\to\infty} w(Y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to\infty} P(Y,t|Y',0) w_0(Y') dY'$$
$$= \sqrt{\frac{a}{\pi b^2}} e^{-\frac{a}{b^2}Y^2} \int_{-\infty}^{\infty} w_0(Y') dY' = \sqrt{\frac{a}{\pi b^2}} e^{-\frac{a}{b^2}Y^2}.$$

Damit ist gezeigt, dass jede Anfangsverteilung $w_0(Y) = w(Y,0)$ im Grenzfall $t \to \infty$ gegen die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $w_\infty(Y)$ strebt.