4. Plenum Statistische Physik II UE, 20.05.2019

1. **Experimentelle Bestimmung des komplexe Brechungsindex**

   Um die optischen Eigenschaften eines Materials zu bestimmen, wird elektromagnetische Strahlung mit Kreisfrequenz ω an einer ebenen polierten Oberfläche des Materials, unter normalem Einfallswinkel reflektiert und das Reflexionsvermögen
   $$R(\omega) = \frac{I_{\text{aus}}(\omega)}{I_{\text{ein}}(\omega)}$$
   über einen weiten Frequenzbereich gemessen.

   a) Auf TUWEL finden Sie Messwerte für das Reflexionsvermögen $R(\omega)$ von Aluminium. Berechnen Sie damit numerisch den komplexen Brechungsindex $n(\omega) = n_r(\omega) + i n_i(\omega)$.

   b) Vergleichen Sie mit dem komplexen Brechungsindex, der vom Drude-Modell mit Parameter $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0} = 15\,\text{eV}$ und $\gamma = 0.4\,\text{eV}$ vorhergesagt wird. Diskutieren Sie eventuelle Unterschiede.

2. **Weiterführende Analyse des Gleichgewichtszustandes**

   Gegeben sei die folgende stochastische Differentialgleichung
   $$\dot{Y}(t) = -aY(t) + b\zeta(t),$$
   wobei die stochastische Variable $\zeta(t)$ ungerichtet $\langle\zeta(t)\rangle = 0$, aber nicht notwendigerweise unkorreliert ist $\langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle = \phi(t - t')$. Das System befindet sich im Gleichgewichtszustand.

   a) Argumentieren Sie warum das Zeitmittel und das Ensemblemittel
   $$\bar{B} = \frac{1}{T}\int_T B(Y(t))dt \qquad \text{und} \qquad \langle B\rangle = \int B(Y)\, w_\infty(Y)\, dY$$
   einer Observable $B(Y)$ im Gleichgewichtszustand äquivalent sind.

   b) Die zur Autokorrelationsfunktion $C_{YY}(t) = \langle Y(\tau)Y(\tau+t)\rangle$ gehörende Fouriertransformation $\tilde{C}_{YY}(\omega)$ wird als spektrale Leistungsdichte bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Zusammenhang zwischen spektraler Leistungsdichte $\tilde{C}_{YY}(\omega)$ und den harmonischen Komponenten des stochastischen Prozesses $Y(t)$ durch
   $$\tilde{C}_{YY}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|\tilde{Y}_T(\omega)|^2}{T} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{Y}_T(\omega) = \int_T Y(t)e^{-i\omega t}dt$$
   gegeben ist.

   c) Zeigen Sie, dass zwischen den spektralen Leistungsdichten $\tilde{C}_{YY}(\omega)$ und $\tilde{C}_{\zeta\zeta}(\omega)$ der folgende Zusammenhang gilt
   $$\tilde{C}_{YY}(\omega) = \frac{b^2\tilde{C}_{\zeta\zeta}(\omega)}{\omega^2 + a^2} = \frac{b^2\phi(\omega)}{\omega^2 + a^2}.$$

   d) Berechnen Sie $C_{YY}(t)$ im Fall $\phi(t) = \delta(t)$ durch Rücktransformation von $\tilde{C}_{YY}(\omega)$.