Lösungen zum 6. Plenum Statistische Physik II UE, 24.06.2019

1. **Autokorrelationsfunktion in Zeitdarstellung**

   Gegeben sei die folgende stochastische Differentialgleichung

   $$\frac{d}{dt}X(t) + \gamma X(t) = A\xi(t),$$

   wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$ und ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ ist. Das System befindet sich im Gleichgewichtszustand.

   a) Warum ist die Autokorrelationsfunktion $C_{XX}(t) = \langle X(\tau)X(\tau+t)\rangle$ im Gleichgewicht nicht von τ abhängig?

   Lösung:

   Der Gleichgewichtszustand ist dadurch charakterisiert, dass statistische Eigenschaften wie Erwartungswerte $\langle X(\tau)\rangle$ oder $\langle X^2(\tau)\rangle$ nicht von der Zeit τ abhängen. Die statistischen Eigenschaften des Prozesses $X(\tau)$ im Gleichgewicht sind also zeitlich translationsinvariant (stationär). Demnach bleibt die Autokorrelationsfunktion invariant, wenn man die Zeit τ um ein beliebiges Δt verschiebt

   $$C_{XX}(t) = \langle X(\tau)X(\tau+t)\rangle = \langle X(\tau')X(\tau'+t)\rangle \qquad \text{mit} \quad \tau' = \tau + \Delta t.$$

   Die Autokorrelationsfunktion kann also nicht von τ anhängen.
   Achtung: Das bedeutet nicht, dass der stochastische Prozess $X(\tau)$ selbst unabhängig von τ ist! Tatsächlich fluktuiert der Prozess $X(\tau)$ ziemlich wild mit der Zeit τ, nur die **statistischen** Eigenschaften des Prozesses (Ensemblemittelwerte) sind von der (absoluten) Zeit unabhängig und damit stationär.

   b) Zeigen Sie, dass $C_{XX}(t)$ symmetrisch in t ist.

   Lösung:

   Wählt man $\Delta t = -t$ so folgt aus der obigen Relation

   $$C_{XX}(t) = \langle X(\tau)X(\tau+t)\rangle = \langle X(\tau-t)X(\tau)\rangle = \langle X(\tau)X(\tau-t)\rangle = C_{XX}(-t).$$

   Im Gleichgewicht ist die Autokorrelationsfunktion $C_{XX}(t)$ symmetrisch in t.

c) Zeigen Sie, dass $C_{XX}(t)$ für $t > 0$ die homogene Gleichung

$$\frac{d}{dt}C_{XX} + \gamma C_{XX}(t) = 0$$

erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie $\langle X(\tau)\xi(\tau+t)\rangle = 0$ für $t > 0$. Warum gilt diese Relation?

Lösung:

Die stochastische Differentialgleichung des Systems kann in die äquivalente Form

$$\frac{d}{dt}X(\tau+t) + \gamma X(\tau+t) = A\xi(\tau+t)$$

umgeschrieben werden. Multipliziert man mit $X(\tau)$ und bildet den Ensemblemittelwert erhält man

$$\langle X(\tau)\frac{d}{dt}X(\tau+t)\rangle + \gamma\langle X(\tau)X(\tau+t)\rangle = A\langle X(\tau)\xi(\tau+t)\rangle.$$

Allgemein gilt, dass die Korrelationsfunktion $\langle A(\tau)B(\tau+t)\rangle$ in ein Produkt $\langle A(\tau)\rangle\langle B(\tau+t)\rangle$ zerfällt, wenn die beiden Größen $A(\tau)$ und $B(\tau+t)$ statistisch **unabhängig** sind. Weil der Wert $X(\tau)$ nichts wissen kann vom stochastischen Rauschen zu einem späteren Zeitpunkt $\xi(\tau+t)$ mit $t > 0$, sind diese beiden Größen statistisch unabhängig und es gilt

$$\langle X(\tau)\xi(\tau+t)\rangle = \langle X(\tau)\rangle\langle\xi(\tau+t)\rangle = 0.$$

Daraus folgt, dass $C_{XX}(t) = \langle X(\tau)X(\tau+t)\rangle$ für $t > 0$ die homogene Gleichung

$$\frac{d}{dt}C_{XX}(t) + \gamma C_{XX}(t) = 0$$

erfüllt. Nutzt man die Symmetrie (Punkt b) erhält man $C_{XX}(t) = C_{XX}(0)e^{-\gamma|t|}$ mit der Anfangsbedingung $C_{XX}(0) = \langle X^2(\tau)\rangle = \frac{A^2}{2\gamma}$.

Weiterführende Bemerkung:

Diese Ableitung lässt sich auch auf stochastische Differentialgleichung höherer Ordnung erweitern. Für den stochastisch getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator (Tutorium 6 Beispiel 1) erhält man beispielsweise

$$\frac{d^2}{dt^2}C_{xx}(t) + \gamma\frac{d}{dt}C_{xx}(t) + \omega_0^2 C_{xx}(t) = 0 \qquad \text{für} \quad t > 0$$

mit den Anfangsbedingungen $C_{xx}(0) = \frac{A^2}{2\gamma}$ und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C_{xx}(t)\Big|_{t=0} &= \langle x(\tau)\frac{d}{dt}x(\tau+t)\rangle\Big|_{t=0} = \langle x(\tau)\frac{d}{d\tau}x(\tau+t)\rangle\Big|_{t=0} = \langle x(\tau)\frac{d}{d\tau}x(\tau)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\langle x^2(\tau)\rangle = 0,\end{aligned}$$

weil $\langle x^2(\tau)\rangle$ nicht von τ abhängt.