1. Tutorium Statistische Physik II UE, 11.03.2018

1. **Gleichgewicht und reduzierte Größen**

   Ein dreidimensionales ideales Gas aus N identischen Teilchen, beschrieben durch die Hamilton-Funktion

   $$H(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}}) = H(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} h(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{q}_i) \right)$$

   mit $V(\mathbf{q}) = \frac{m\omega^2 \mathbf{q}^2}{2}$, befinde sich im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $W(E)dE$, die Gesamtenergie E des idealen Gases im Energieintervall $[E, E + dE]$ zu finden.

   $$W(E) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \delta(E - H(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}})) \rho_k(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}}) \; d^{3N}q \; d^{3N}p$$

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $w(\epsilon)d\epsilon$, die Einteilchenenergie ϵ eines zufällig herausgegriffenen Teilchens im Energieintervall $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ zu finden.

   $$w(\epsilon) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \delta(\epsilon - h(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)) \rho_k(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}}) \; d^{3N}q \; d^{3N}p$$

   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $w(\mathbf{q}', \mathbf{p}')d^3q d^3p$, ein zufällig herausgegriffenes Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}'$ am Ort $\mathbf{q}'$ zu finden.

   $$w(\mathbf{q}', \mathbf{p}') = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1) \rho_k(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}}) \; d^{3N}q \; d^{3N}p$$

   d) Berechnen Sie aus der 1-Teilchen Verteilungsfunktion $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = N w(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ die Teilchendichte $n(\mathbf{q})$ am Ort $\mathbf{q}$ und zeigen Sie, dass die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung

   $$\nabla P(\mathbf{q}) + n(\mathbf{q}) \nabla V(\mathbf{q}) = 0$$

   erfüllt ist. Für den Druck P kann die ideale Gasgleichung verwendet werden.

2. **Kinetische Gastheorie**

   Ein ideales Gas aus N Teilchen mit Masse m in einem Behälter mit Volumen V sei im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T.
   Hinweis: Die 1-Teilchen Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{N}{V} \left(\frac{\beta}{2m\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}$$

   a) Betrachten Sie ein kleines Flächenelement der Behälterwand dA und berechnen Sie den pro Zeiteinheit auf das Wandelement übertragenen Impuls $d\dot{\mathbf{p}}$. Woher kennen Sie dieses Ergebnis?

   b) In der Behälterwand werde nun ein kleines Loch geöffnet aus dem Gas in ein thermisch isoliertes evakuiertes Gefäß übergehen kann. In der Verbindung zum neuen Gefäßen befinde sich ein Chopper, der nur Teilchen in x-Richtung mit Geschwindigkeit im Intervall $[v_x, v_x + dv_x]$ und $v_y = v_z = 0$ durchlässt. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Teilchen im neuen Gefäß, nachdem sich ein thermodynamisches Gleichgewicht eingestellt hat?

3. **Diffusion**

   Ein kubischer Behälter mit Volumen L^3 werde durch eine Trennwand in zwei **identische** Teilsysteme $V_1 = V_2$ geteilt. In beiden Volumina befinde sich die gleiche Anzahl an Teilchen, allerdings seien M homogen verteilte Teilchen im ersten Volumen mit einem radioaktiven Marker versehen. Nun wird die Trennwand abrupt entfernt. Infolge der thermischen Bewegung wird die Konzentration an markierten Teilchen $c(\mathbf{r}, t) = \frac{dM}{dV}$ eine zeit- und ortsabhängige Größe. Nehmen Sie an, der Ausgleichsprozess werde durch das (zweite) Fick'sche Gesetz

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$$

   beschrieben und zeigen Sie, dass die Änderung der Anzahl markierter Teilchen im ersten Volumen gegeben ist durch

$$\dot{M}_1(t) = -\frac{4MD}{L^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-D\lambda_k^2 t} \qquad \text{mit} \qquad \lambda_k = (2k+1)\frac{\pi}{L}.$$

   Hinweis: Reduzieren Sie das Problem auf eine Dimension. Es gilt

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \cos(\lambda_k x) dx = (-1)^k \frac{L}{(2k+1)\pi}.$$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1ab/1cd/2a/2b/3