

2. Tutorium Statistische Physik II UE, 25.03.2019

1. Effusion

Betrachten Sie einen geschlossenen zylindrischen Behälter bei Raumtemperatur mit Radius $R = 5\text{cm}$ und Höhe $H = 10\text{cm}$, dessen Wände aus einem porösen Material bestehen. Insgesamt 0.01% der Oberfläche bestehe aus Poren mit Durchmesser $d = 0.05\mu\text{m}$. Anfänglich befinde sich außerhalb und innerhalb des Behälters Stickstoff N_2 . Nun werde das äußere Gas abrupt durch Wasserstoff H_2 ersetzt. **Hinweis:** Die Umgebung kann als unendliches Teilchenreservoir bei Standarddruck angenommen werden.

- Skizzieren Sie die Situation und stellen Sie eine Vermutung an, was passieren wird. Diskutieren Sie die vorhandenen Längenskalen und zeigen Sie, dass die mittlere freie Weglänge größer als der Porendurchmesser ist.
- Berechnen Sie die Anzahl an Wasserstoffteilchen, die pro Zeiteinheit von außen in den Behälter gelangen, indem Sie annehmen, dass alle Teilchen, die zufällig eine Pore treffen, durchgelassen werden.
- Berechnen Sie die zeitabhängige Gesamtanzahl an Teilchen (H_2 und N_2) im Inneren des Zylinders und daraus folgend den zeitabhängigen Druck. Nehmen Sie an, dass die Temperatur im Prozess konstant bleibt. Nach welcher Zeit wird der Druck maximal?

2. Drehviskosimeter

Ein zylindrischer Behälter mit Radius R und Höhe H drehe sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um einen rotationsfreien inneren Zylinder gleicher Höhe und Radius $R' < R$. Im Zwischenraum befinde sich ein Gas mit Viskosität η und Massendichte ρ . Randeffekte können vernachlässigt werden. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) verschwinden die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes in z und r Richtung $u_z = u_r = 0$. Für die verbleibende Komponente in φ Richtung $u_\varphi(r)$ reduzieren sich die (inkompressiblen) Navier-Stokes Gleichungen auf

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho u_\varphi^2}{r}.$$

- Berechnen Sie das stationäre Geschwindigkeitsfeld zwischen den Zylindern. **Hinweis:** Verwenden Sie einen Potenzansatz und die no-slip condition.
- Welches Drehmoment wirkt auf den inneren Zylinder? **Hinweis:** Die tangential zur Zylinderwand wirkende Schubspannung ist

$$\sigma_{\varphi r} = \eta \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R'}$$

3. Reversibilität und Rekurrenzzeit

In einem isolierten Behälter mit Volumen V befindet sich ein homogen verteiltes ideales Gas aus N Teilchen der Masse m . Am Anfang befindet sich das System in einem sehr speziellen Zustand, bei dem jedes Teilchen den gleichen Impuls $\mathbf{p} = (p_x^0, 0, 0)$ hat.

- a) Infolge der Teilchenstöße stellt sich nach kurzer Zeit ein thermisches Gleichgewicht ein. Berechnen Sie die Entropieänderung zwischen Anfangszustand und Gleichgewichtszustand als Funktion von V , N und p_x^0 .

Hinweis: Der Anfangszustand kann als eindeutiger Mikrozustand angesehen werden.

- b) Zeigen Sie, dass für die Entropie $S = -k_B \langle \ln(\rho) \rangle$ allgemein aus der Liouville Gleichung $\dot{\rho} = \{H, \rho\}$ folgt, dass $\frac{dS}{dt} = 0$ (keine Entropieänderung zwischen Anfangszustand und Gleichgewichtszustand). Wir werden versuchen diesen Widerspruch im Tutorium gemeinsam aufzulösen.

- c) Laut dem Poincaréschen Wiederkehersatz kommt ein endliches System seinem Anfangszustand nach endlicher Zeit wieder beliebig nahe. Schätzen Sie diese Zeit für das gegebene System ab, indem Sie die gesamte Anzahl an zugänglichen Zuständen durch die Kollisionsfrequenz dividieren.¹

Hinweis: Sie können $N \approx 10^{23}$ annehmen.

- d) Stellen Sie sich vor, nach der Zeit t_0 werden die Teilchenimpulse aller Teilchen umgekehrt $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$. Wie verläuft die nachfolgende Dynamik? Wird diese noch durch die Boltzmann Gleichung beschrieben?

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2a/2b/3ab/3cd

¹Boltzmann machte diese Abschätzung bereits 1896 und schrieb: Wie groß die Zahl ist, davon erhält man einen Begriff, wenn man bedenkt, daß sie viele Trillionen Stellen hat. Wenn dagegen um jeden mit dem besten Fernrohr sichtbaren Fixstern so viele Planeten, wie um die Sonne kreisten, wenn auf jedem dieser Planeten so viele Menschen wie auf der Erde wären und jeder dieser Menschen eine Trillion Jahre lebte, so hätte die Zahl der Sekunden, welche alle zusammen erleben, noch lange nicht fünfzig Stellen.