3. Tutorium Statistische Physik II UE, 08.04.2019

1. **Viskosität**

   Betrachten Sie ein viskoses Gas zwischen zwei parallelen ebenen Platten im Abstand d. Die obere Platte bewegt sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ in x-Richtung, während die untere ruht. Die lokale Gleichgewichtsverteilung des Gases sei gegeben durch

   $$f_1^{(0)}(z, \mathbf{p}) = n_0 \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{(p_x - m u_x(z))^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}}$$

   mit dem Geschwindigkeitsfeld $u_x(z)$, wobei die z-Achse die Flächennormale auf die Platten bezeichnet. Beachten Sie, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen Platten und Gas verschwindet.

   a) Berechnen Sie anhand $f_1^{(0)}$ die auf die ruhende Platte übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ (siehe 1.Tutorium).

   b) Berechnen Sie erneut die auf die ruhende Platte übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z$ mithilfe der Relaxationszeitnäherung

   $$f_1 \approx f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \right).$$

   c) Berechnen Sie die Viskosität $\eta = \sigma_{xz}/\dot{\gamma}$ mit der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dz}$.

2. **Gas mit Temperaturgradient**

   Betrachten Sie ein Gas in einem Zylinder mit Länge L und Radius R. Die beiden Enden des Zylinders werden auf unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 gehalten. Die lokale Gleichgewichtsverteilung des Gases sei gegeben durch

   $$f_1^{(0)}(x, \mathbf{p}) = n(x) \left(\frac{\beta(x)}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(x) \frac{\mathbf{p}^2}{2m}},$$

   wobei als x-Achse die Zylinderachse gewählt wurde.

   a) Im Gleichgewicht verschwindet die mittlere Driftgeschwindigkeit $\langle v_x \rangle$ des Gases. Verwenden Sie die Relaxationszeitnäherung, um daraus die Gleichgewichtsbedingung

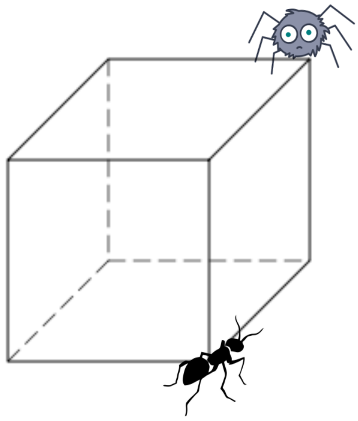
   $$T \frac{dn}{dx} + n \frac{dT}{dx} = 0$$

   herzuleiten. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis für ein ideales Gas?

   b) Berechnen Sie die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit durch den Zylinder strömt. **Hinweis:** Sie können die Wärmeleitfähigkeit aus der Vorlesung übernehmen. Approximieren Sie die Relaxationszeit durch die Stoßzeit und verwenden Sie den Temperaturverlauf aus dem 2. Plenum.

3. **Random walk**

Auf einem Würfel befinde sich eine Spinne auf der Jagt nach einer Ameise (Anfangsbedingung siehe Bild). Die Spinne kann sich nur entlang der Kanten bewegen und die Ameise ist ahnungslos, weshalb sie sich gar nicht bewegt. Wenn sich die Spinne jede Sekunde zufällig für eine Kante entscheidet und diese entlanggeht, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinne die Ameise in n Sekunden trifft? Berechnen Sie auch die mittlere Zeit, die die Spinne auf der Jagt verbringt.



Hinweis: Betrachten Sie alle Ecken mit gleichem Abstand zur Ameise als gleichwertig. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

4. **Diffusion**

Betrachten Sie eine (sehr) große Anzahl N an Teilchen in einer Dimension, wobei jedes Teilchen pro Zeitschritt Δt zufällig um die Distanz Δx nach links oder rechts hüpft. Der Sprung nach links oder rechts sei gleich wahrscheinlich und die Bewegung jedes Teilchens kann als unabhängig angenommen werden. Anfänglich zur Zeit $t_0 = 0$ befinden sich alle Teilchen am gleichen Ort $x_0 = 0$.

a) Berechnen Sie die Teilchendichte $n(x,t)$ am Ort $x = m\Delta x$ zur Zeit $t = M\Delta t$.

b) Zeigen Sie, dass für **große** Zeiten t und $\frac{x}{t} \ll \frac{\Delta x}{\Delta t}$, die Teilchendichte durch eine Gaußverteilung

$$n(x,t) \approx N \sqrt{\frac{\alpha(t)}{\pi}} e^{-\alpha(t) x^2}$$

approximiert werden kann und bestimmen Sie $\alpha(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie die (verbesserte) Stirling Approximation

$$s! \approx s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}\,,$$

sowie $\ln(1+\xi) = \xi + \mathcal{O}(\xi^2)$.

c) Zeigen Sie, dass $n(x,t)$ für große Zeiten die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

erfüllt und bestimmen Sie die Diffusionskonstante D als Funktion von Δx und Δt.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3/4a/4bc