Lösungen zum 3. Tutorium Statistische Physik II UE, 08.04.2019

1. **Viskosität**

   Betrachten Sie ein viskoses Gas zwischen zwei parallelen ebenen Platten im Abstand d. Die obere Platte bewegt sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ in x-Richtung, während die untere ruht. Die lokale Gleichgewichtsverteilung des Gases sei gegeben durch

   $$f_1^{(0)}(z, \mathbf{p}) = n_0 \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{(p_x - m u_x(z))^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}}$$

   mit dem Geschwindigkeitsfeld $u_x(z)$, wobei die z-Achse die Flächennormale auf die Platten bezeichnet. Beachten Sie, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen Platten und Gas verschwindet.

   a) Berechnen Sie anhand $f_1^{(0)}$ die auf die ruhende Platte übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ (siehe 1.Tutorium).

   Lösung:

   Die ruhende Platte sei bei $z = 0$ und die bewegte Platte bei $z = d$ gelegen. Bei $z = 0$ verschwindet aufgrund der no-slip condition die Strömungsgeschwindigkeit $u_x(0) = 0$. Die übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z$ ist gegeben durch

   $$\boldsymbol{\sigma}_z = 2 \int\limits_{p_z < 0} \mathbf{p} \, \frac{-p_z}{m} f_1^{(0)} d^3p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n_0 k_B T \end{pmatrix},$$

   wobei das negative Vorzeichen notwendig ist, weil wir uns für den Impulstransport in negativer z-Richtung interessieren.

   b) Berechnen Sie erneut die auf die ruhende Platte übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z$ mithilfe der Relaxationszeitnäherung

   $$f_1 \approx f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} \left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \right).$$

   Lösung:

   Innerhalb der Relaxationszeitnäherung lässt sich die 1-Teilchen Verteilungsfunktion approximieren durch

   $$f_1 \approx f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} \frac{p_z}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial z} = f_1^{(0)} - \tau_{\text{rel}} \frac{p_z}{m} \beta \big(p_x - m u_x(z)\big) \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} f_1^{(0)}.$$

Die übertragene Impulsstromdichte $\boldsymbol{\sigma}_z$ ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_z &= 2 \int\limits_{p_z<0} \mathbf{p}\, \frac{-p_z}{m} f_1 d^3p \\
&= -2 \int\limits_{p_z<0} \mathbf{p}\, \frac{p_z}{m} f_1^{(0)} d^3p + \tau_{\mathrm{rel}} \frac{2}{m^2} \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} \beta \int\limits_{p_z<0} \mathbf{p}\, p_x\, p_z^2 f_1^{(0)} d^3p = \begin{pmatrix} n_0 k_B T \tau_{\mathrm{rel}} \dot{\gamma} \\ 0 \\ -n_0 k_B T \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wobei wir

$$\int p_x^2\, p_z^2 f_1^{(0)} d^3p = (m k_B T)^2$$

und $\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dz}$ verwendet haben.

c) Berechnen Sie die Viskosität $\eta = \sigma_{xz}/\dot{\gamma}$ mit der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dz}$.

Lösung:

Die Viskosität lässt sich aus dem vorherigen Ergebnis einfach ablesen

$$\eta = \sigma_{xz}/\dot{\gamma} = \tau_{\mathrm{rel}} n_0 k_B T.$$

2. **Gas mit Temperaturgradient**

Betrachten Sie ein Gas in einem Zylinder mit Länge L und Radius R. Die beiden Enden des Zylinders werden auf unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 gehalten. Die lokale Gleichgewichtsverteilung des Gases sei gegeben durch

$$f_1^{(0)}(x, \mathbf{p}) = n(x) \left(\frac{\beta(x)}{2m\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(x) \frac{\mathbf{p}^2}{2m}},$$

wobei als x-Achse die Zylinderachse gewählt wurde.

a) Im Gleichgewicht verschwindet die mittlere Driftgeschwindigkeit $\langle v_x \rangle$ des Gases. Verwenden Sie die Relaxationszeitnäherung, um daraus die Gleichgewichtsbedingung

$$T \frac{dn}{dx} + n \frac{dT}{dx} = 0$$

herzuleiten. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis für ein ideales Gas?

Lösung:

Innerhalb der Relaxationszeitnäherung lässt sich die 1-Teilchen Verteilungsfunktion approximieren durch

$$
\begin{aligned}
f_1 &\approx f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \right) \\
&= f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \frac{p_x}{m} f_1^{(0)} - \tau_{\mathrm{rel}} \frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \frac{p_x}{m} f_1^{(0)} + \tau_{\mathrm{rel}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \frac{d\beta}{dx} \frac{p_x}{m} f_1^{(0)}
\end{aligned}
$$

Im stationären Fall muss der vom Temperaturgradienten induzierte Teilchenstrom durch den Diffusionsstrom des Dichtegradienten kompensiert werden. Aus der Gleichgewichtsbedingung $j_x = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
j_x &= \int \frac{p_x}{m} f_1 d^3p \\
&= -\frac{\tau_{\rm rel}}{nm^2}\frac{dn}{dx}\int p_x^2 f_1^{(0)} d^3p - \frac{3\tau_{\rm rel}}{2\beta m^2}\frac{d\beta}{dx}\int p_x^2 f_1^{(0)} d^3p + \frac{\tau_{\rm rel}}{2m^3}\frac{d\beta}{dx}\int \mathbf{p}^2 p_x^2 f_1^{(0)} d^3p \\
&= -\frac{\tau_{\rm rel}}{nm\beta}\frac{dn}{dx} - \frac{3\tau_{\rm rel}}{2\beta^2 m}\frac{d\beta}{dx} + \frac{5\tau_{\rm rel}}{2m\beta^2}\frac{d\beta}{dx} \\
&= -\frac{\tau_{\rm rel}}{nm\beta}\frac{dn}{dx} + \frac{\tau_{\rm rel}}{\beta^2 m}\frac{d\beta}{dx} \\
&= -\frac{\tau_{\rm rel}}{nm\beta}\frac{dn}{dx} - \frac{\tau_{\rm rel}k_B}{m}\frac{dT}{dx} = 0,
\end{aligned}$$

woraus

$$T\frac{dn}{dx} + n\frac{dT}{dx} = 0$$

folgt. Das ist nichts anderes als die „mechanische" Gleichgewichtsbedingung $P = nk_BT = \text{const}$.

b) Berechnen Sie die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit durch den Zylinder strömt. **Hinweis:** Sie können die Wärmeleitfähigkeit aus der Vorlesung übernehmen. Approximieren Sie die Relaxationszeit durch die Stoßzeit und verwenden Sie den Temperaturverlauf aus dem 2. Plenum.

Lösung:

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ergibt sich für den Wärmestrom

$$\begin{aligned}
j_{Q,x} &= \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\frac{p_x}{m} f_1 d^3p \\
&= -\frac{\tau_{\rm rel}}{2nm^3}\frac{dn}{dx}\int \mathbf{p}^2 p_x^2 f_1^{(0)} d^3p - \frac{3\tau_{\rm rel}}{4\beta m^3}\frac{d\beta}{dx}\int \mathbf{p}^2 p_x^2 f_1^{(0)} d^3p + \frac{\tau_{\rm rel}}{4m^4}\frac{d\beta}{dx}\int \mathbf{p}^4 p_x^2 f_1^{(0)} d^3p \\
&= -\frac{5}{2}\frac{\tau_{\rm rel} nTk_B^2}{m}\frac{dT}{dx},
\end{aligned}$$

wobei $T\frac{dn}{dx} + n\frac{dT}{dx} = 0$ verwendet wurde. Die Wärmeleitfähigkeit lässt sich approximieren indem man die Relaxationszeit durch die Stoßzeit ersetzt

$$\kappa = \frac{5k_B}{8d_{\rm W}^2}\sqrt{\frac{Tk_B}{\pi m}}.$$

Im 2.Plenum wurde der Temperaturverlauf $T(x)$ hergeleitet. Insbesondere ist der Gradient am Ende des Zylinders bei $x = 0$ gegeben durch

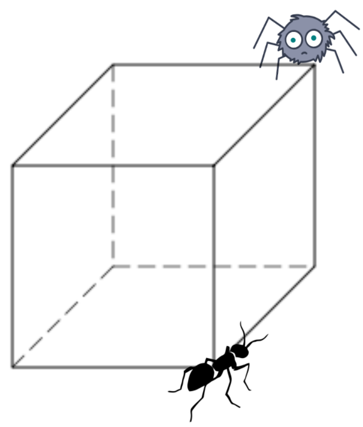
$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2T_1}{3L}\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Der Wärmestrom $\dot{Q}$ durch jede Querschnittfläche des Zylinders ist gleich. Es ist daher nicht relevant, welche Querschnittfläche man wählt. Am einfachsten ist es aber $\dot{Q}$ bei $x = 0$ auszurechnen. Man erhält

$$\dot{Q} = -\pi R^2 \kappa \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{5R^2}{12 d_{\mathrm{W}}^2 L}\sqrt{\frac{k_B^3 \pi}{m}}\left(T_2^{\frac{3}{2}} - T_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

3. **Random walk**

Auf einem Würfel befinde sich eine Spinne auf der Jagt nach einer Ameise (Anfangsbedingung siehe Bild). Die Spinne kann sich nur entlang der Kanten bewegen und die Ameise ist ahnungslos, weshalb sie sich gar nicht bewegt. Wenn sich die Spinne jede Sekunde zufällig für eine Kante entscheidet und diese entlanggeht, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinne die Ameise in n Sekunden trifft? Berechnen Sie auch die mittlere Zeit, die die Spinne auf der Jagt verbringt.



Hinweis: Betrachten Sie alle Ecken mit gleichem Abstand zur Ameise als gleichwertig. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Lösung:

Die Spinne kann die Ameise nur in einer geraden Anzahl an Schritten $n = 2s$ erreichen. Wenn alle Ecken mit gleichem Abstand zur Ameise als gleichwertig betrachtet werden, dann ist Spinne nach zwei Schritten entweder bei der Ameise oder wieder im Ausgangszustand. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinne die Ameise in **zwei** Schritten erreicht ist $p = \frac{2}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinne die Ameise **nicht** in **zwei** Schritten erreicht, ist demnach $q = 1 - p = \frac{7}{9}$. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinne die Ameise in $2s$ Schritten erreicht gegeben durch

$$w(s) = q^{s-1} p.$$

Die Spinne versucht es $(s-1)$-mal [macht $(s-1)$-mal 2 Schritte] und ist beim s-ten Mal erfolgreich. Die mittlere Zeit, die die Spinne auf der Jagt verbringt, ist gegeben durch

$$\langle T_{\mathrm{Jagt}} \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} (2s) q^{s-1} p = 2p \sum_{s=1}^{\infty} s q^{s-1} = \frac{2p}{(1-q)^2} = \frac{2}{p} = 9.$$

4. **Diffusion**

Betrachten Sie eine (sehr) große Anzahl N an Teilchen in einer Dimension, wobei jedes Teilchen pro Zeitschritt Δt zufällig um die Distanz Δx nach links oder rechts hüpft. Der Sprung nach links oder rechts sei gleich wahrscheinlich und die Bewegung jedes Teilchens kann als unabhängig angenommen werden. Anfänglich zur Zeit $t_0 = 0$ befinden sich alle Teilchen am gleichen Ort $x_0 = 0$.

a) Berechnen Sie die Teilchendichte $n(x,t)$ am Ort $x = m\Delta x$ zur Zeit $t = M\Delta t$.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Teilchen in M Zeitschritten m_r Schritte nach rechts und $M - m_r$ Schritte nach links zu springen ist

$$w(M, m_r) = \frac{M!}{m_r!(M - m_r)!} 2^{-m_r} 2^{-M+m_r}.$$

Die Position nach m_r Schritte nach rechts und $M - m_r$ Schritte nach links ist $m = m_r - M + m_r = 2m_r - M$. Berücksichtigt man noch, dass jedes Teilchen unabhängig von allen anderes springt, ist die Teilchendichte nach M Zeitschritten

$$n(x,t) = n(m\Delta x, M\Delta t) = N\frac{1}{2\Delta x} w\Big(M, \frac{M}{2} + \frac{m}{2}\Big) = N\frac{1}{2\Delta x}\frac{M!\, 2^{-M}}{\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{2}\right)!\, \left(\frac{M}{2} - \frac{m}{2}\right)!}$$

b) Zeigen Sie, dass für **große** Zeiten t und $\frac{x}{t} \ll \frac{\Delta x}{\Delta t}$, die Teilchendichte durch eine Gaußverteilung

$$n(x,t) \approx N\sqrt{\frac{\alpha(t)}{\pi}} e^{-\alpha(t)x^2}$$

approximiert werden kann und bestimmen Sie $\alpha(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die (verbesserte) Stirling Approximation

$$s! \approx s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,,$$

sowie $\ln(1+\xi) = \xi + \mathcal{O}(\xi^2)$.

Lösung:

Für große Zeiten $M \gg 1$ und $\frac{m}{M} \ll 1$ erhält man

$$\begin{aligned} w\Big(M, \frac{M}{2} + \frac{m}{2}\Big) &\approx \frac{M^M e^{-M}\sqrt{2\pi M}\, 2^{-M}}{\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{2}\right)^{\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{2}\right)} \left(\frac{M}{2} - \frac{m}{2}\right)^{\left(\frac{M}{2} - \frac{m}{2}\right)} e^{-M}\sqrt{4\pi^2\left(\frac{M^2}{4} - \frac{m^2}{4}\right)}} \\ &= \frac{M^M\sqrt{M}\, 2^{-M}}{\left(\frac{M^2}{4} - \frac{m^2}{4}\right)^{\frac{M}{2}}\sqrt{\pi\left(\frac{M^2}{2} - \frac{m^2}{2}\right)}} \left(\frac{\frac{M}{2} - \frac{m}{2}}{\frac{M}{2} + \frac{m}{2}}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^{\frac{M}{2}}\sqrt{\frac{\pi M}{2}}\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)}} \left(\frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}\right)^{\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$

Wenn man nun den Logarithmus auf beiden Seiten zieht folgt

$$\ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi M}}w\right) =$$
$$= -\frac{M}{2}\ln\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right) + \frac{m}{2}\ln\left(1-\frac{m}{M}\right) - \frac{m}{2}\ln\left(1+\frac{m}{M}\right)$$
$$\approx \frac{m^2}{2M} + \frac{m^2}{2M^2} - \frac{m^2}{2M} - \frac{m^2}{2M} \approx -\frac{m^2}{2M}.$$

Setzt man dieses Resultat in den Ausdruck für die Dichte ein, erhält man

$$n(x,t) = N\frac{1}{2\Delta x}w\left(M, \frac{M}{2}+\frac{m}{2}\right) = N\sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi t\Delta x^2}}e^{-\frac{x^2\Delta t}{2t\Delta x^2}} = N\sqrt{\frac{\alpha(t)}{\pi}}e^{-\alpha(t)x^2},$$

mit

$$\alpha(t) = \frac{\Delta t}{2t\Delta x^2}.$$

c) Zeigen Sie, dass $n(x,t)$ für große Zeiten die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

erfüllt und bestimmen Sie die Diffusionskonstante D als Funktion von Δx und Δt.

Lösung:

Einsetzen von

$$n(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha(t)}{\pi}}e^{-\alpha(t)x^2}$$

in die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

ergibt

$$\alpha'(t) = -4D\alpha^2.$$

Einsetzen von

$$\alpha(t) = \frac{\Delta t}{2t\Delta x^2}$$

zeigt, dass

$$-\frac{\Delta t}{2t^2\Delta x^2} = -4D\left(\frac{\Delta t}{2t\Delta x^2}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}.$$