4. Tutorium Statistische Physik II UE, 29.04.2019

1. **Herr Mustermann sucht Essen**

   Herr Mustermann geht jeden Tag entweder in die Mensa oder zur Teigware essen. Wenn er in der Mensa war, geht er mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0.6$ am nächsten Tag zur Teigware. Wenn er bei der Teigware war, geht er mit Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0.2$ am nächsten Tag in die Mensa. Der Ort $X(t_n)$, an dem er am Tag t_n zu Mittag isst, beschreibt einen stochastischen Prozess.

   a) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit $P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$. Handelt es sich bei dem Prozess um einen Markov Prozess?

   b) Wenn Herr Mustermann bei der Teigware war, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ihn drei Tage später wieder bei der Teigware zu treffen?

   c) Wie lange dauert es im Durchschnitt bis Herr Mustermann seine Stempelkarte (10 Stempel) bei der Teigware voll bekommt?
   Hinweis: Berechnen Sie die mittlere Zeit zwischen zwei Stempeln und multiplizieren Sie diese mit zehn.

2. **Tennistraining**

   Zwei Tennisspieler wollen abwechselnd Aufschläge üben und haben dafür nur zwei Bälle zur Verfügung. Spieler 1 ist immer zur Zeit t_{2k} an der Reihe und Spieler 2 immer zur Zeit t_{2k+1} mit $k \in \mathbb{N}_0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufschlag im Netz landet, ist für beide Spieler 50%. Wenn kein Ball auf der Seite eines Spielers ist, muss dieser aussetzen. Die Anzahl der Bälle, die ein Spieler zur Verfügung hat, sei gegeben durch $X(t_n) \in \{0, 1, 2\}$ mit $t_n = t_{2k}$ für Spieler 1 und $t_n = t_{2k+1}$ für Spieler 2. $X(t_n)$ beschreibt einen stochastischen Prozess.

   a) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit und stellen Sie $P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ in Form einer 3×3 Matrix dar.

   b) Nachdem länger gespielt wurde, stellt sich eine (zeitunabhängige) Gleichgewichtsverteilung $\pi(x)$ ein, welche durch

   $$\pi(x) = \sum_{x'=0}^{2} P(x, t_n | x', t_{n-1}) \pi(x')$$

   ausgezeichnet ist. Berechnen Sie $\pi(x)$ und daraus die (relative) Häufigkeit, mit der entweder Spieler 1 oder Spieler 2 aussetzen muss.
   Hinweis: Die Gleichgewichtsverteilung $\pi(x)$ lässt sich finden, indem Sie das Eigenwertproblem der 3×3 Matrix lösen.

3. **Stochastisch getriebener harmonischer Oszillator**

Betrachten Sie einen gedämpften harmonischen Oszillator mit Masse m, der von einer stochastischen Kraft $\xi(t)$ getrieben wird

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t),$$

wobei die stochastische Kraft völlig unkorreliert $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t - t')$ und ungerichtet $\langle\xi(t)\rangle = 0$ sei. Die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\theta(t),$$

wobei wir $4\omega_1^2 = 4\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ annehmen (Schwingungsfall). Anfänglich ist der Oszillator im Ursprung $x(0) = 0$ und in Ruhe $\dot{x}(0) = 0$.

a) Berechnen Sie die mittlere Auslenkung des Oszillators $\langle x(t)\rangle$ für $t > 0$.

b) Zeigen Sie, dass das mittlere Auslenkungsquadrat unter den vorliegenden Anfangsbedingungen geschrieben werden kann als

$$\langle x^2(t)\rangle = A^2 \int_0^t G^2(\tau)d\tau.$$

c) Berechnen Sie $\langle x^2(t)\rangle$ und leiten Sie im Grenzfall $t \to \infty$ ausgehend vom Gleichverteilungssatz eine Relation zwischen A und γ her. Woher kennen Sie diese Relation bereits?
Hinweis: Bei der Berechnung des Integrals hilft

$$\int e^{-\gamma\tau}\cos(2\omega_1\tau)d\tau = \frac{e^{-\gamma\tau}}{\gamma^2 + 4\omega_1^2}\Big(2\omega_1\sin(2\omega_1\tau) - \gamma\cos(2\omega_1\tau)\Big) + C$$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1ab/1c/2/3a/3bc