Lösungen zum 4. Tutorium Statistische Physik II UE, 29.04.2019

1. **Herr Mustermann sucht Essen**

   Herr Mustermann geht jeden Tag entweder in die Mensa oder zur Teigware essen. Wenn er in der Mensa war, geht er mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0.6$ am nächsten Tag zur Teigware. Wenn er bei der Teigware war, geht er mit Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0.2$ am nächsten Tag in die Mensa. Der Ort $X(t_n)$, an dem er am Tag t_n zu Mittag isst, beschreibt einen stochastischen Prozess.

   a) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit $P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1})$. Handelt es sich bei dem Prozess um einen Markov Prozess?

   Lösung:

   Es handelt sich um einen Markov Prozess in einem Zustandsraum der zwei Elemente beinhaltet. Entweder Herr Mustermann isst bei der Teigware oder in der Mensa. Stellt man die Wahrscheinlichkeit, dass er am n-ten Tag in der Teigware isst $w(x_n = \mathrm{T}, t_n)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass er am n-ten Tag in der Mensa isst $w(x_n = \mathrm{M}, t_n)$ als zweidimensionalen Vektor dar

   $$\mathbf{p}(t_n) = \begin{pmatrix} w(\mathrm{T}, t_n) \\ w(\mathrm{M}, t_n) \end{pmatrix},$$

   so kann man die Transferwahrscheinlichkeit $P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1})$ als Matrix darstellen

   $$\mathbf{M}(t_n, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} P(\mathrm{T}, t_n|\mathrm{T}, t_{n-1}) & P(\mathrm{T}, t_n|\mathrm{M}, t_{n-1}) \\ P(\mathrm{M}, t_n|\mathrm{T}, t_{n-1}) & P(\mathrm{M}, t_n|\mathrm{M}, t_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_2 & p_1 \\ p_2 & 1 - p_1 \end{pmatrix}$$

   für die gilt

   $$\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{M}(t_n, t_{n-1}) \cdot \mathbf{p}(t_{n-1}).$$

   b) Wenn Herr Mustermann bei der Teigware war, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ihn drei Tage später wieder bei der Teigware zu treffen?

   Lösung:

   Wenn Herr Mustermann am 0-ten Tag in der Teigware war gilt

   $$\mathbf{p}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung drei Tage später gilt

   $$\begin{aligned} \mathbf{p}(t_3) &= \mathbf{M}(t_3, t_2) \cdot \mathbf{M}(t_2, t_1) \cdot \mathbf{M}(t_1, t_0) \cdot \mathbf{p}(t_0) \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.752 & 0.744 \\ 0.248 & 0.256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.752 \\ 0.248 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Wie man erkennt, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach 3 Tagen bereits nahezu unabhängig davon, wo Herr Mustermann am 0-ten Tag gegessen hat.

c) Wie lange dauert es im Durchschnitt bis Herr Mustermann seine Stempelkarte (10 Stempel) bei der Teigware voll bekommt?
Hinweis: Berechnen Sie die mittlere Zeit zwischen zwei Stempeln und multiplizieren Sie diese mit zehn.

Lösung:

Für die mittlere Anzahl an Tagen $\langle \Delta t \rangle$ zwischen zwei Stempeln bei der Teigware gilt

$$\begin{aligned}
\langle \Delta t \rangle &= (1-p_2) + 2(p_2 p_1) + 3(p_2 p_1)(1-p_1) + 4(p_2 p_1)(1-p_1)^2 + ... \\
&= (1-p_2) + p_2 p_1 \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)(1-p_1)^{i-1} \\
&= (1-p_2) + p_2 p_1 \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p_1)^{i-1} + p_2 p_1 \sum_{i=1}^{\infty} (1-p_1)^{i-1} \\
&= (1-p_2) + p_2 p_1 \frac{1}{p_1^2} + p_2 p_1 \frac{1}{p_1} = 1 + \frac{p_2}{p_1}.
\end{aligned}$$

Die mittlere Anzahl an Tagen bis er seine Stempelkarte voll hat, ist demnach

$$\langle S \rangle = 10 + 10 \frac{p_2}{p_1} = 13.\dot{3}.$$

2. **Tennistraining**

Zwei Tennisspieler wollen abwechselnd Aufschläge üben und haben dafür nur zwei Bälle zur Verfügung. Spieler 1 ist immer zur Zeit t_{2k} an der Reihe und Spieler 2 immer zur Zeit t_{2k+1} mit $k \in \mathbb{N}_0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufschlag im Netz landet, ist für beide Spieler 50%. Wenn kein Ball auf der Seite eines Spielers ist, muss dieser aussetzen. Die Anzahl der Bälle, die ein Spieler zur Verfügung hat, sei gegeben durch $X(t_n) \in \{0, 1, 2\}$ mit $t_n = t_{2k}$ für Spieler 1 und $t_n = t_{2k+1}$ für Spieler 2. $X(t_n)$ beschreibt einen stochastischen Prozess.

a) Berechnen Sie die Transferwahrscheinlichkeit und stellen Sie $P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ in Form einer 3×3 Matrix dar.

Lösung:

Es handelt sich um einen Markov Prozess in einem Zustandsraum der drei Elemente beinhaltet. Entweder der Spieler der zur Zeit t_n an der Reihe ist, hat $x_n = 0$ Bälle, $x_n = 1$ Bälle oder $x_n = 2$ Bälle zur Verfügung. Wie in Beispiel 1 kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Vektor darstellen

$$\mathbf{p}(t_n) = \begin{pmatrix} w(0, t_n) \\ w(1, t_n) \\ w(2, t_n) \end{pmatrix}.$$

Die Transferwahrscheinlichkeit $P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1})$ ist als Matrix gegeben durch

$$\mathbf{M}(t_n, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} P(0, t_n|0, t_{n-1}) & P(0, t_n|1, t_{n-1}) & P(0, t_n|2, t_{n-1}) \\ P(1, t_n|0, t_{n-1}) & P(1, t_n|1, t_{n-1}) & P(1, t_n|2, t_{n-1}) \\ P(2, t_n|0, t_{n-1}) & P(2, t_n|1, t_{n-1}) & P(2, t_n|2, t_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

für die gilt

$$\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{M}(t_n, t_{n-1}) \cdot \mathbf{p}(t_{n-1}).$$

b) Nachdem länger gespielt wurde, stellt sich eine (zeitunabhängige) Gleichgewichtsverteilung $\pi(x)$ ein, welche durch

$$\pi(x) = \sum_{x'=0}^{2} P(x, t_n|x', t_{n-1})\pi(x')$$

ausgezeichnet ist. Berechnen Sie $\pi(x)$ und daraus die (relative) Häufigkeit, mit der entweder Spieler 1 oder Spieler 2 aussetzen muss.
Hinweis: Die Gleichgewichtsverteilung $\pi(x)$ lässt sich finden, indem Sie das Eigenwertproblem der 3×3 Matrix lösen.

Lösung:

Die stationäre Gleichgewichtsverteilung

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \end{pmatrix}$$

ist ausgezeichnet durch

$$\begin{pmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \end{pmatrix}.$$

Durch Umformung erhält man das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \end{pmatrix},$$

welches durch

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 0.5t \\ t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R},$$

gelöst wird. Die Randbedingung $\pi(0)+\pi(1)+\pi(2) = 1$ ergibt schließlich $t = \frac{2}{5}$ und damit $\pi(0) = \frac{1}{5}$. Dies entspricht gerade der (relativen) Häufigkeit, mit der entweder Spieler 1 oder Spieler 2 aussetzen muss.

3. **Stochastisch getriebener harmonischer Oszillator**

Betrachten Sie einen gedämpften harmonischen Oszillator mit Masse m, der von einer stochastischen Kraft $F_\mathrm{s}(t) = mA\xi(t)$ getrieben wird

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t),$$

wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$ und ungerichtet $\langle\xi(t)\rangle = 0$ sei. Die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\theta(t),$$

wobei wir $4\omega_1^2 = 4\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ annehmen (Schwingungsfall). Anfänglich ist der Oszillator im Ursprung $x(0) = 0$ und in Ruhe $\dot{x}(0) = 0$.

a) Berechnen Sie die mittlere Auslenkung des Oszillators $\langle x(t)\rangle$ für $t > 0$.

Lösung:

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lässt sich als Summe aus homogener Lösung $x_\mathrm{h}(t)$ und partikulärer Lösung $x_\mathrm{p}(t)$ darstellen

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = C\sin(\omega_0 t) + C'\cos(\omega_0 t) + \int_0^t G(t-\tau)\xi(\tau)d\tau.$$

Man kann sich vorstellen, dass die stochastische Kraft $F_\mathrm{s}(t)$ erst zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschalten wird, davor ist der Oszillator laut Angabe eindeutig im Grundzustand lokalisiert $x(0) = 0$ und in Ruhe $\dot{x}(0) = 0$. Folglich gilt $C = C' = 0$. Für eine ungerichtete stochastische Kraft $\langle\xi(t)\rangle = 0$, ist die mittlere Auslenkung des Oszillators für $t > 0$ daher gegeben durch

$$\langle x(t)\rangle = \int_0^t G(t-\tau)\langle\xi(\tau)\rangle d\tau = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass das mittlere Auslenkungsquadrat unter den vorliegenden Anfangsbedingungen geschrieben werden kann als

$$\langle x^2(t)\rangle = A^2\int_0^t G^2(\tau)d\tau.$$

Lösung:

Mithilfe der Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = \int_0^t G(t-\tau)\xi(\tau)d\tau$$

lässt sich das mittlere Auslenkungsquadrat darstellen als

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t)\rangle &= \int_0^t \int_0^t G(t-\tau)G(t-\tau')\langle \xi(\tau)\xi(\tau')\rangle d\tau d\tau' \\
&= \int_0^t \int_0^t G(t-\tau)G(t-\tau')\delta(t-t')d\tau d\tau' \\
&= \int_0^t G(t-\tau)G(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t G^2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie $\langle x^2(t)\rangle$ und leiten Sie im Grenzfall $t \to \infty$ ausgehend vom Gleichverteilungssatz eine Relation zwischen A und γ her. Woher kennen Sie diese Relation bereits?
Hinweis: Bei der Berechnung des Integrals hilft

$$\int e^{-\gamma\tau}\cos(2\omega_1\tau)d\tau = \frac{e^{-\gamma\tau}}{\gamma^2+4\omega_1^2}\Big(2\omega_1\sin(2\omega_1\tau) - \gamma\cos(2\omega_1\tau)\Big) + C$$

Lösung:

Einsetzen der Green'sche Funktion aus der Angabe

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\theta(t)$$

ergibt für das mittlere Auslenkungsquadrat

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t)\rangle &= A^2\int_0^t G^2(\tau)d\tau = \frac{A^2}{\omega_1^2}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\sin^2(\omega_1\tau)d\tau \\
&= \frac{A^2}{\omega_1^2}\int_0^t e^{-\gamma\tau}\frac{1}{2}\Big(1-\cos(2\omega_1\tau)\Big)d\tau \\
&= \frac{A^2}{2\omega_1^2}\Big[\int_0^t e^{-\gamma\tau}d\tau - \int_0^t e^{-\gamma\tau}\cos(2\omega_1\tau)d\tau\Big] \\
&= \frac{A^2}{2\omega_1^2\gamma}\Big[1 - e^{-\gamma t} - \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{4\omega_0^2}\Big(2\omega_1\sin(2\omega_1 t) - \gamma\cos(2\omega_1 t)\Big) - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\Big] \\
&= \frac{A^2}{2\omega_1^2\gamma}\Big[\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - e^{-\gamma t} - \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{4\omega_0^2}\Big(2\omega_1\sin(2\omega_1 t) - \gamma\cos(2\omega_1 t)\Big)\Big],
\end{aligned}$$

und im Grenzfall $t \to \infty$ folgt daraus

$$\langle x^2(t)\rangle \overset{t\to\infty}{=} \frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma}.$$

Mithilfe des Gleichverteilungssatzes

$$\frac{m\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle}{2} = \frac{k_B T}{2},$$

lässt sich das bereits aus der Vorlesung bekannte Fluktuations-Dissipations-Theorem

$$A^2 = \frac{2\gamma k_B T}{m}$$

herleiten.