5. Tutorium Statistische Physik II UE, 13.05.2019

1. **Brownsche Bewegung in drei Dimensionen**

   Betrachten Sie ein kugelförmiges Rußteilchen (Radius 2μm, Dichte 2267kg/m^3), welches sich in einem N_2 Gas (Temperatur 25°C, Druck 1bar, Viskosität 17μPa·s) befindet. Das Rußteilchen ist im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung und jede Geschwindigkeitskomponente v_i erfüllt die stochastische Differentialgleichung

   $$\dot{v_i}(t) + \gamma v_i(t) = A\xi_i(t),$$

   wobei die stochastische Variable $\xi_i(t)$ unkorreliert $\langle \xi_i(t)\xi_i(t')\rangle = \delta(t-t')$ und ungerichtet $\langle \xi_i(t)\rangle = 0$ ist. Es gilt das Gesetz von Stokes.

   a) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Gasteilchen, die pro Zeiteinheit auf die Oberfläche des Rußteilchens auftreffen.

   b) Unter einem Mikroskop mit beliebiger Vergrößerung, machen Sie alle Δt Sekunden ein Bild des Rußteilchens. Um das mittlere Geschwindigkeitsquadrat des Rußteilchens abschätzten, messen Sie die zurückgelegte Distanz zwischen je zwei Bildern und mitteln über viele Aufnahmen. Zeigen Sie, dass der von Ihnen gemessene Wert gegeben ist durch

   $$\langle \mathbf{v}^2\rangle_{\text{Messung}} = \frac{\langle \Delta\mathbf{x}^2\rangle}{\Delta t^2} = \langle \mathbf{v}^2\rangle\Big(\frac{e^{-\gamma\Delta t} - 1 + \gamma\Delta t}{\frac{1}{2}\gamma^2\Delta t^2}\Big).$$

   Hinweis: Alle Δt Sekunden machen Sie ein neues „Experiment“ mit neuer Anfangsgeschwindigkeit. Mitteln Sie über alle Anfangsgeschwindigkeiten und berücksichtigen Sie, dass diese der Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgen.

   c) Berechnen Sie $\langle \mathbf{v}^2\rangle_{\text{Messung}}$ für Ihr Auge mit $\Delta t = 0.04\,$s. Welchen Wert erhalten Sie, wenn Sie eine Slow-Motion-Kamera, die 10000 Bilder pro Sekunde aufnimmt, verwenden. Wie groß ist der tatsächliche Wert $\langle \mathbf{v}^2\rangle$?

2. **Überdämpfter harmonischer Oszillator**

   Betrachten Sie einen überdämpften ($\gamma \gg 1$) harmonischen Oszillator mit Masse m, der von einer stochastischen Kraft $F_s(t) = mA\xi(t)$ getrieben wird

   $$\dot{x} + \frac{\omega_0^2}{\gamma}x = \frac{A}{\gamma}\xi(t),$$

   wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt sei.

   a) Finden Sie die stationäre Lösung $w_\infty(x)$ der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung.

   b) Berechnen Sie $\langle x^n(t)\rangle$ im Fall $t \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Es gilt

   $$\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{ikx}dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

3. **Black-Scholes-Modell**

   Der Aktienkurs $S(t)$ eines Wertpapiers folge der stochastischen Differentialgleichung

   $$\dot{S}(t) = uS(t) + \alpha S(t)\xi(t),$$

   wobei u die erwartete Wachstumsrate und $\alpha > 0$ die Volatilität des Marktes bezeichnet. Die stochastische Variable $\xi(t)$ sei unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ und normalverteilt.

   a) Wie lautet die zu $S(t)$ gehörende Fokker-Planck-Gleichung?

   b) Berechnen Sie mithilfe Ito's Lemma, die stochastische Differentialgleichung für die neue Variable $Y(t) = \ln(S(t))$.

   c) Bei $Y(t)$ handelt es sich um eine normalverteilte Größe. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu(t)$ und die Standardabweichung $\sigma(t)$.
   Hinweis: Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist gegeben durch

   $$Y(t) = Y(0) + \Big(u - \frac{\alpha^2}{2}\Big)t + \alpha W(t),$$

   wobei $W(t)$ ein Standard-Wiener-Prozess ist.

4. **Drude-Modell**

   Die durch ein oszillierendes elektrisches Feld $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ in einem Metall induzierte elektrische Stromdichte $j(t)$, wird im Drude-Modell durch die Differentialgleichung

   $$\frac{d}{dt}j(t) + \gamma j(t) = \frac{ne^2}{m}E(t)$$

   beschrieben. Die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen induzierter Stromdichte und elektrischem Feld $j(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega)$.

   a) Berechnen Sie die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$.

   b) Zeigen Sie, dass der Realteil $\sigma_r(\omega)$ und der Imaginärteil $\sigma_i(\omega)$ der elektrischen Leitfähigkeit über die Kramers-Kronig-Relationen

   $$\sigma_r(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_i(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad \sigma_i(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_r(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'$$

   miteinander verknüpft sind.
   Hinweis: Folgende Formeln sind nützlich

   $$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')}{x'-x}dx' = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}dx'$$
   $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}$$

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2a/2b/3/4