

# Lösungen zum 5. Tutorium Statistische Physik II UE, 13.05.2019

## 1. Brownsche Bewegung in drei Dimensionen

Betrachten Sie ein kugelförmiges Rußteilchen (Radius  $2\mu\text{m}$ , Dichte  $2267\text{kg/m}^3$ ), welches sich in einem  $\text{N}_2$  Gas (Temperatur  $25^\circ\text{C}$ , Druck 1bar, Viskosität  $17\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ ) befindet. Das Rußteilchen ist im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung und jede Geschwindigkeitskomponente  $v_i$  erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$\dot{v}_i(t) + \gamma v_i(t) = A\xi_i(t),$$

wobei die stochastische Variable  $\xi_i(t)$  unkorreliert  $\langle \xi_i(t)\xi_i(t') \rangle = \delta(t-t')$  und ungerichtet  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$  ist. Es gilt das Gesetz von Stokes.

- a) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Gasteilchen, die pro Zeiteinheit auf die Oberfläche des Rußteilchens auftreffen.

### Lösung:

Wie im 2.Plenum gezeigt wurde, ist die Anzahl an Stickstoffteilchen die pro Zeiteinheit auf die kleine Fläche  $dA$  auftreffen gegeben durch

$$d\dot{N} = \frac{1}{4}n\langle v \rangle dA \quad \text{mit} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_{\text{N}_2}}} \quad \text{und} \quad n = \frac{P}{k_B T}.$$

Integration über die gesamte Oberfläche  $A = 4\pi R^2$  des kugelförmigen Rußteilchens ergibt

$$\dot{N} = \frac{1}{4}n\langle v \rangle A \approx 1.4 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}.$$

- b) Unter einem Mikroskop mit beliebiger Vergrößerung, machen Sie alle  $\Delta t$  Sekunden ein Bild des Rußteilchens. Um das mittlere Geschwindigkeitsquadrat des Rußteilchens abschätzen, messen Sie die zurückgelegte Distanz zwischen je zwei Bildern und mitteln über viele Aufnahmen. Zeigen Sie, dass der von Ihnen gemessene Wert gegeben ist durch

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{\text{Messung}} = \frac{\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle}{\Delta t^2} = \langle \mathbf{v}^2 \rangle \left( \frac{e^{-\gamma \Delta t} - 1 + \gamma \Delta t}{\frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2} \right).$$

**Hinweis:** Alle  $\Delta t$  Sekunden machen Sie ein neues „Experiment“ mit neuer Anfangsgeschwindigkeit. Mitteln Sie über alle Anfangsgeschwindigkeiten und berücksichtigen Sie, dass diese der Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgen.

### Lösung:

Für das mittlere Quadrat der zurückgelegten Strecke zwischen zwei Bildern

$$\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle = \langle \Delta x_1^2 \rangle + \langle \Delta x_2^2 \rangle + \langle \Delta x_3^2 \rangle$$

erhält man mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0 = (v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0})$  den folgenden Wert (siehe Vorlesung Folie 58)

$$\langle \Delta x_i^2 \rangle = \left( v_{i,0}^2 - \frac{A^2}{2\gamma} \right) \frac{(1 - e^{-\gamma\Delta t})^2}{\gamma^2} + \frac{A^2}{\gamma^3} (\gamma\Delta t + e^{-\gamma\Delta t} - 1).$$

Nun startet aber nicht jede Beobachtung zwischen zwei Bildern immer mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit  $v_{i,0}^2$ . Stattdessen hat das Rußteilchen laut der Maxwell-Boltzmann-Verteilung alle  $\Delta t$  Sekunden eine andere Geschwindigkeit. Wenn man über viele Bilder mittelt erhält man

$$\langle \Delta x_i^2 \rangle = \left( \langle v_{i,0}^2 \rangle - \frac{A^2}{2\gamma} \right) \frac{(1 - e^{-\gamma\Delta t})^2}{\gamma^2} + \frac{A^2}{\gamma^3} (\gamma\Delta t + e^{-\gamma\Delta t} - 1).$$

Verwendet man den Gleichverteilungssatz sowie das Fluktuations-Dissipations-Theorem ergibt sich

$$\langle v_{i,0}^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} = \frac{A^2}{2\gamma}.$$

Daraus folgt

$$\langle \Delta x_i^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle \left( \frac{e^{-\gamma\Delta t} - 1 + \gamma\Delta t}{\frac{1}{2}\gamma^2} \right).$$

und weiters

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{\text{Messung}} = \frac{\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle}{\Delta t^2} = \langle \mathbf{v}^2 \rangle \left( \frac{e^{-\gamma\Delta t} - 1 + \gamma\Delta t}{\frac{1}{2}\gamma^2 \Delta t^2} \right).$$

- c) Berechnen Sie  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{\text{Messung}}$  für Ihr Auge mit  $\Delta t = 0.04$  s. Welchen Wert erhalten Sie, wenn Sie eine Slow-Motion-Kamera, die 10000 Bilder pro Sekunde aufnimmt, verwenden. Wie groß ist der tatsächliche Wert  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$ ?

**Lösung:**

Unter Verwendung des Gesetzes von Stokes gilt

$$\gamma = \frac{6\pi\eta R}{m} = 8436 \text{ s}^{-1}.$$

Für das beobachtete mittlere Geschwindigkeitsquadrat bei  $\Delta t = 0.04$  gilt somit

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{\text{Messung}} = \langle \mathbf{v}^2 \rangle \left( \frac{e^{-\gamma\Delta t} - 1 + \gamma\Delta t}{\frac{1}{2}\gamma^2 \Delta t^2} \right) = 9.61 \times 10^{-10}, \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Verwendet man die Slow-Motion-Kamera  $\Delta t = 10^{-4}$  erhält man

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{\text{Messung}} = 1.25 \times 10^{-7}, \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Der tatsächliche Wert liegt bei

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 1.6 \times 10^{-7}, \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

## 2. Überdämpfter harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen überdämpften ( $\gamma \gg 1$ ) harmonischen Oszillator mit Masse  $m$ , der von einer stochastischen Kraft  $F_s(t) = mA\xi(t)$  getrieben wird

$$\dot{x} + \frac{\omega_0^2}{\gamma}x = \frac{A}{\gamma}\xi(t),$$

wobei die stochastische Variable  $\xi(t)$  unkorreliert  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ , ungerichtet  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  und normalverteilt sei.

- a) Finden Sie die stationäre Lösung  $w_\infty(x)$  der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung.

**Lösung:**

Die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(x, t)$  ist gegeben durch

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\omega_0^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x}(xw) + \frac{A^2}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega_0^2 xw + \frac{A^2}{2\gamma} \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Daraus folgt mit  $\sigma^2 = \frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma} = \frac{k_B T}{\omega_0^2 m}$  für die stationäre Lösung  $w_\infty(x)$  die Gleichung

$$-xw_\infty = \sigma^2 \frac{\partial w_\infty}{\partial x}$$

deren Lösung gegeben ist durch

$$w_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

- b) Berechnen Sie  $\langle x^n(t) \rangle$  im Fall  $t \rightarrow \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Hinweis:** Es gilt

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

**Lösung:**

Die Momente  $\langle x^n \rangle$  der Wahrscheinlichkeitsdichte  $w_\infty(x)$  lassen sich berechnen, indem man die Taylor-Entwicklung der charakteristischen Funktion  $c(k)$  berechnet

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\infty(x) e^{ikx} dx = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{k^2\sigma^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sigma^{2n}}{n!2^n} k^{2n}.$$

Der Vergleich mit der allgemeingültigen Formel

$$c(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

liefert  $\langle x^{2n+1} \rangle = 0$  und

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{n!2^n} \sigma^{2n} = \frac{(2n)!}{n!} \left( \frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma} \right)^n = \frac{(2n)!}{n!} \left( \frac{k_B T}{2\omega_0^2 m} \right)^n.$$

### 3. Black-Scholes-Modell

Der Aktienkurs  $S(t)$  eines Wertpapiers folge der stochastischen Differentialgleichung

$$\dot{S}(t) = uS(t) + \alpha S(t)\xi(t),$$

wobei  $u$  die erwartete Wachstumsrate und  $\alpha > 0$  die Volatilität des Marktes bezeichnet. Die stochastische Variable  $\xi(t)$  sei unkorreliert  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ , ungerichtet  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  und normalverteilt.

- a) Wie lautet die zu  $S(t)$  gehörende Fokker-Planck-Gleichung?

**Lösung:**

Die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w(S, t)$  ist gegeben durch

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial S}(Sw) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2}(S^2w) = (u + \alpha^2)w + (u + 2\alpha^2)S \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{\alpha^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 w}{\partial S^2}.$$

- b) Berechnen Sie mithilfe Ito's Lemma, die stochastische Differentialgleichung für die neue Variable  $Y(t) = \ln(S(t))$ .

**Lösung:**

Die stochastische Differentialgleichung für die neue Variable

$$Y(t) = f(S) = \ln(S(t))$$

lautet

$$\dot{Y}(t) = f'(S)uS + \frac{1}{2}f''(S)\alpha^2S^2 + f'(S)\alpha S\xi(t) = u - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha\xi(t).$$

- c) Bei  $Y(t)$  handelt es sich um eine normalverteilte Größe. Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mu(t)$  und die Standardabweichung  $\sigma(t)$ .

**Hinweis:** Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$Y(t) = Y(0) + \left(u - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha W(t),$$

wobei  $W(t)$  ein Standard-Wiener-Prozess ist.

**Lösung:**

Der Standard-Wiener-Prozess  $W(t)$  ist normalverteilt mit Mittelwert  $\mu_W = 0$  und Standardabweichung  $\sigma_W(t) = \sqrt{t}$ , daher ist auch die Zufallsvariable  $Y(t)$  normalverteilt

$$w(Y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(Y-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

mit Mittelwert

$$\mu(t) = Y(0) + \left(u - \frac{\alpha^2}{2}\right)t$$

und Standardabweichung

$$\sigma(t) = \alpha\sigma_W(t) = \alpha\sqrt{t}.$$

#### 4. Drude-Modell

Die durch ein oszillierendes elektrisches Feld  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$  in einem Metall induzierte elektrische Stromdichte  $j(t)$ , wird im Drude-Modell durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}j(t) + \gamma j(t) = \frac{ne^2}{m}E(t)$$

beschrieben. Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$  beschreibt den Zusammenhang zwischen induzierter Stromdichte und elektrischem Feld  $j(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega)$ .

- a) Berechnen Sie die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$ .

**Lösung:**

Elektrisches Feld  $E(t)$  und Stromdichte  $j(t)$  sind hier keine vektoriellen Größen, weil man nur eine bestimmte Richtung betrachtet. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}j(t) + \gamma j(t) = \frac{ne^2}{m}E(t)$$

ist eine Summe  $j(t) = j_{\text{hom}}(t) + j_{\text{par}}(t)$  aus homogener Lösung  $j_{\text{hom}}(t) = Ce^{-\gamma t}$  und partikulärer Lösung  $j_{\text{par}}(t)$ . Die homogene Lösung verschwindet für Zeiten  $t\gamma \gg 1$ . Für die partikuläre Lösung  $j_{\text{par}}(t) = \sigma(\omega)e^{-i\omega t}$  erhält man

$$-i\omega\sigma(\omega)e^{-i\omega t} + \gamma\sigma(\omega)e^{-i\omega t} = \frac{ne^2}{m}E_0e^{-i\omega t},$$

und weiters

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{-i\omega + \gamma} = \frac{ne^2}{m} \frac{i\omega + \gamma}{\omega^2 + \gamma^2}.$$

- b) Zeigen Sie, dass der Realteil  $\sigma_r(\omega)$  und der Imaginärteil  $\sigma_i(\omega)$  der elektrischen Leitfähigkeit über die Kramers-Kronig-Relationen

$$\sigma_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad \sigma_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

miteinander verknüpft sind.

**Hinweis:** Folgende Formeln sind nützlich

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} dx'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a}$$

**Lösung:**

Der Realteil und der Imaginärteil der Leitfähigkeit sind gegeben durch

$$\sigma_r(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad \text{und} \quad \sigma_i(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2}.$$

Der Realteil  $\sigma_r(\omega)$  lässt sich aus dem Imaginärteil  $\sigma_i(\omega)$  konstruieren durch

$$\begin{aligned} \sigma_r(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sigma_i(\omega') - \sigma_i(\omega)}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left( \frac{\gamma^2 - \omega'\omega}{(\omega'^2 + \gamma^2)(\omega^2 + \gamma^2)} \right) d\omega' \\ &= \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{\omega'^2 + \gamma^2} d\omega' = \frac{ne^2}{m} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Der Imaginärteil  $\sigma_i(\omega)$  lässt sich aus dem Realteil  $\sigma_r(\omega)$  konstruieren durch

$$\begin{aligned} \sigma_i(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sigma_r(\omega') - \sigma_r(\omega)}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left( \frac{\gamma\omega + \gamma\omega'}{(\omega'^2 + \gamma^2)(\omega^2 + \gamma^2)} \right) d\omega' \\ &= \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma\omega}{(\omega^2 + \gamma^2)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{\omega'^2 + \gamma^2} d\omega' = \frac{ne^2}{m} \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$