6. Tutorium Statistische Physik II UE, 27.05.2019

1. **Fluktuationen im Gleichgewicht**

   Betrachten Sie erneut den harmonischen Oszillator vom 4. Tutorium (Beispiel 3)
   $$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t).$$
   Die stochastische Kraft wirkt bereits seit langer Zeit, so dass sich der Oszillator im Gleichgewichtszustand befindet.

   a) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung $w_\infty(x)$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Theorem von Isserlis um alle Momente und daraus die Gleichgewichtsverteilung zu berechnen.

   b) Zeigen Sie, dass die spektrale Leistungsdichte der Oszillation im Gleichgewicht gegeben ist durch
   $$\tilde{C}_{xx}(\omega) = \frac{A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

2. **Lineare Antwort auf externe Kräfte**

   Betrachten Sie den harmonischen Oszillator aus Beispiel 1 auf den zusätzlich die periodische externe Kraft $F_\mathrm{e}(t) = F_0\cos(\Omega t)$ wirkt
   $$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t) + \frac{1}{m}F_\mathrm{e}(t).$$
   Der Oszillator befinde sich im stationären Zustand, der sich einstellt, nachdem der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

   a) Berechnen Sie die zeitabhängige mittlere Auslenkung $\langle x(t)\rangle$.

   b) Die Suszeptibilität $\tilde{\chi}(\omega)$ beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen mittlere Auslenkung und externer Kraft. Berechnen Sie $\tilde{\chi}(\omega)$ und skizzieren Sie den Verlauf der Pole als Funktion von γ.

   c) Wie verhalten sich der Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität $\tilde{\chi}(\omega)$ unter Zeitumkehr $t \to -t$? Welchen Schluss können Sie daraus ziehen?

   d) Bestimmen Sie die pro Periode $\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}$ in Wärme umgewandelte Energie
   $$\dot{Q} = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} F_\mathrm{e}(t)\langle\dot{x}(t)\rangle dt,$$
   als Funktion von Ω, F_0 und $\mathrm{Im}\tilde{\chi}(\Omega)$.
   Hinweis: Es gilt
   $$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \phi)dt = \frac{\sin(\phi)}{2}$$

   e) Verwenden Sie das klassische (verallgemeinerte) Fluktuations-Dissipations-Theorem
   $$\tilde{C}_{xx}(\omega) = -\frac{2k_BT}{\omega}\,\mathrm{Im}\tilde{\chi}_{xx}(\omega)$$
   und $\tilde{\chi}(\omega) = -\tilde{\chi}_{xx}(\omega)$ um den (bereits bekannten) Zusammenhang zwischen A und γ zu berechnen.

3. **Klassisches Wärmerauschen eines Widerstandes**

In einem Leiter (Widerstand) mit (kleiner) Querschnittsfläche A und (großer) Länge L entsteht im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T aufgrund thermischer Fluktuationen ein stochastisches (lokales) internes elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t)$. Die induzierte (lokale) Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, wird im Drude-Modell beschrieben durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \gamma \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t).$$

a) Zeigen Sie, dass der Gesamtstrom $J(t)$ und die Spannungsdifferenz $U_{\text{th}}(t)$ zwischen den beiden Enden des Leiters durch die Gleichung

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t) + R_0 J(t) = U_{\text{th}}(t)$$

verknüpft sind, wobei R_0 den (Gleichstrom-)Widerstand bezeichnet.
Hinweis: Für den Gesamtstrom entlang der Leiterachse $\mathbf{e}_z$ und für die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Enden des Leiters gilt

$$J(t) = \frac{1}{L}\int_{\text{Leiter}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV \qquad \text{und} \qquad U_{\text{th}}(t) = \frac{1}{A}\int_{\text{Leiter}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) dV.$$

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der spektralen Leistungsdichte des Stromes $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ und spektralen Leistungsdichte der Spannung $\tilde{C}_{UU}(\omega)$.

c) Berechnen Sie mithilfe der (klassischen) Green-Kubo-Formel $\tilde{C}_{UU}(\omega)$ als Funktion von R_0 und T.
Hinweis: Betrachten Sie nur den Realteil der Green-Kubo-Formel und drücken Sie die rechte Seite durch $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ aus.

d) Zeigen Sie dass, die Spannung als $U_{\text{th}}(t) = U_0 \xi(t)$ geschrieben werden kann, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t - t')$ und ungerichtet $\langle \xi(t)\rangle = 0$ ist. Bestimmen Sie U_0.

e) Verbindet man die beiden Enden des Leiters mit einem Kondensator der Kapazität C und Ladung $Q(t)$, führt dies zu einem zusätzlichen Spannungsterm

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t) + R_0 J(t) = U_{\text{th}}(t) - \frac{Q(t)}{C}.$$

Zeigen Sie, dass im Gleichgewichtszustand die mittlere gespeicherte Energie im Kondensator gegeben ist durch

$$\langle E\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} = \frac{k_B T}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\dot{Q}(t) = J(t)$ und $U_{\text{th}}(t) = U_0\xi(t)$ sowie das Resultat aus dem 4. Tutorium (Beispiel 3).

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cde/3abc/3de