Lösungen zum 6. Tutorium Statistische Physik II UE, 27.05.2019

1. **Fluktuationen im Gleichgewicht**

   Betrachten Sie erneut den harmonischen Oszillator vom 4. Tutorium (Beispiel 3)
   $$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t).$$
   Die stochastische Kraft wirkt bereits seit langer Zeit, so dass sich der Oszillator im Gleichgewichtszustand befindet.

   a) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung $w_\infty(x)$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Theorem von Isserlis um alle Momente und daraus die Gleichgewichtsverteilung zu berechnen.

   Lösung:

   Mithilfe der Greenschen Funktion $G(t)$ kann die Lösung dargestellt werden als
   $$x(t) = A\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\xi(\tau)d\tau.$$
   Den stationären Zustand erhält man, wenn man als untere Integrationsvariable $t = -\infty$ wählt. Die stochastische Kraft wirkt also bereits seit unendlich langer Zeit und wurde nicht erst zum Zeitpunkt $t = 0$ „eingeschalten” wie im 3. Beispiel vom 4. Tutorium. Die geraden Momente ergeben sich aus dem Theorem von Isserlis
   $$\big\langle \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_{2k})\big\rangle = \frac{1}{k!2^k}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{2k}}\prod_{i=1}^{k}\big\langle \xi(t_{\sigma_{2i-1}})\xi(t_{\sigma_{2i}})\big\rangle$$
   indem man in den Ausdruck für die Momente $\langle x^{2k}(t)\rangle$ einsetzt
   $$\begin{aligned}\langle x^{2k}(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{t}...\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau_1)...G(t-\tau_{2k})\langle\xi(\tau_1)...\xi(\tau_{2k})\rangle d\tau_1...d\tau_{2k}\\ &= \frac{1}{k!2^k}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{2k}}\prod_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau_{\sigma_{2i-1}})G(t-\tau_{\sigma_{2i}})\big\langle\xi(\tau_{\sigma_{2i-1}})\xi(\tau_{\sigma_{2i}})\big\rangle d\tau_{\sigma_{2i-1}}d\tau_{\sigma_{2i}}\\ &= \frac{(2k)!}{k!2^k}\left(\int_{-\infty}^{t} G^2(t-\tau)d\tau\right)^k = \frac{(2k)!}{k!2^k}\left(\int_{0}^{\infty} G^2(\tau)d\tau\right)^k = \frac{(2k)!}{k!2^k}\left(\frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma}\right)^k,\end{aligned}$$
   wobei im letzten Schritt das Resultat aus dem 4. Tutorium (Beispiel 3)
   $$\int_0^\infty G^2(\tau)d\tau = \frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma}$$
   verwendet wurde. Folgt man den gleichen Schritten wie im 5.Tutorium (Beispiel 2) so ergibt sich für die Gleichgewichtsverteilung
   $$w_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit} \qquad \sigma^2 = \frac{A^2}{2\omega_0^2\gamma}.$$

b) Zeigen Sie, dass die spektrale Leistungsdichte der Oszillation im Gleichgewicht gegeben ist durch

$$\tilde{C}_{xx}(\omega) = \frac{A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

Lösung:

Multipliziert man die Bewegungsgleichung mit $e^{i\omega t}$ und integriert über eine endliche Zeitspanne T so folgt

$$\int_T \ddot{x}(t)e^{i\omega t}dt + \gamma \int_T \dot{x}(t)e^{i\omega t}dt + \omega_0^2 \int_T x(t)e^{i\omega t}dt = A \int_T \xi(t)e^{i\omega t}.$$

Wenn T sehr groß ist kann man partiell integrieren und die Randterme vernachlässigen

$$-\omega^2 \int_T x(t)e^{i\omega t}dt - i\omega\gamma \int_T x(t)e^{i\omega t}dt + \omega_0^2 \int_T x(t)e^{i\omega t}dt = A \int_T \xi(t)e^{i\omega t}.$$

Verwendet man die Definition der abgeschnittenen Fourier-Transformation

$$\tilde{x}_T(\omega) = \int_T x(t)e^{i\omega t}dt$$

und betrachtet das Betragsquadrat, folgt daraus

$$\Big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\Big)|\tilde{x}_T(\omega)|^2 = A^2|\tilde{\xi}_T(\omega)|^2.$$

Der Zusammenhang zwischen $\tilde{C}_{xx}(\omega)$ und $\tilde{C}_{\xi\xi}(\omega)$ lässt sich mit dem Wiener-Chintschin-Theorem herstellen

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{x}_T(\omega)|^2}{T} &= \frac{A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \lim_{T\to\infty} \frac{|\tilde{\xi}_T(\omega)|^2}{T} \\
&= \frac{A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tilde{C}_{\xi\xi}(\omega) \\
&= \frac{A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2},
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C}_{\xi\xi}(\omega) = 1$ verwendet wurde.

Bemerkung:

Mithilfe der spektrale Leistungsdichte lässt sich die mittlere potentiellen Energie in den Beitrag einzelner Frequenzkomponenten zerlegen

$$\langle E_p \rangle = \frac{m\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2\tilde{C}_{xx}(\omega) d\omega.$$

2. **Lineare Antwort auf externe Kräfte**

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator aus Beispiel 1 auf den zusätzlich die periodische externe Kraft $F_\mathrm{e}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ wirkt

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\xi(t) + \frac{1}{m}F_\mathrm{e}(t).$$

Der Oszillator befinde sich im stationären Zustand, der sich einstellt, nachdem der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

a) Berechnen Sie die zeitabhängige mittlere Auslenkung $\langle x(t)\rangle$.

Lösung:

Bildet man den Erwartungswert der Bewegungsgleichung folgt daraus

$$\langle\ddot{x}\rangle + \gamma\langle\dot{x}\rangle + \omega_0^2\langle x\rangle = A\langle\xi(t)\rangle + \frac{1}{m}\langle F_\mathrm{e}(t)\rangle.$$

Die stochastische Kraft soll ungerichtet $\langle\xi(t)\rangle = 0$ sein, woraus mit

$$\langle\dot{x}\rangle = \frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\ddot{x}\rangle = \frac{d^2}{dt^2}\langle x(t)\rangle$$

folgt, dass $\langle x(t)\rangle$ die Gleichung des periodisch getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators erfüllt

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x(t)\rangle + \gamma\frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle + \omega_0^2\langle x(t)\rangle = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

Dieses System wurde ausführlich in der „Grundlagen der Physik 1" Vorlesung behandelt. Als Lösungsansatz wählt man

$$\langle x(t)\rangle = C\cos(\Omega t + \phi).$$

Einsetzten liefert (siehe Demtröder 1, Seite 358)

$$C = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} \qquad \text{und} \qquad \tan(\phi) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

b) Die Suszeptibilität $\tilde{\chi}(\omega)$ beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen mittlere Auslenkung und externer Kraft. Berechnen Sie $\tilde{\chi}(\omega)$ und skizzieren Sie den Verlauf der Pole als Funktion von γ.

Lösung:

Der Zusammenhang zwischen $\langle\tilde{x}(\omega)\rangle$ und $\tilde{F}_\mathrm{e}(\omega)$ wird durch die Suszeptibilität

$$\langle\tilde{x}(\omega)\rangle = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{F}_\mathrm{e}(\omega)$$

hergestellt. Durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung erhält man

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)\langle\tilde{x}(\omega)\rangle = \frac{1}{m}\tilde{F}_\mathrm{e}(\omega),$$

woraus unmittelbar

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

folgt. Die Pole sind gegeben durch

$$\omega_{\pm} = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

c) Wie verhalten sich der Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität $\tilde{\chi}(\omega)$ unter Zeitumkehr $t \to -t$? Welchen Schluss können Sie daraus ziehen?

Lösung:

In einem zeitumkehrinvarianten System ist $x(-t)$ eine Lösung zu $F_e(-t)$, wenn $x(t)$ eine Lösung zu $F_e(t)$ ist. Im Fourierraum bedeutet das, dass aus $\tilde{x}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{F}_e(\omega)$ auch $\tilde{x}(-\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{F}_e(-\omega)$ folgt. Damit dem so ist müsste $\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}(-\omega)$ gelten. Das vorliegende System ist allerdings nicht zeitumkehrinvariant, weil die Reibung Energie in Wärme umgewandelt. Deshalb gilt $\tilde{\chi}(\omega) \neq \tilde{\chi}(-\omega)$. Verantwortlich dafür ist der Imaginärteil der Suszeptibilität. Für diesen gilt nämlich $\chi_i(\omega) = -\chi_i(-\omega)$ wie aus

$$\chi_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t)\chi(t)dt$$

ersichtlich wird. Für den Realteil hingegen gilt

$$\chi_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t)\chi(t)dt$$

und damit $\chi_r(\omega) = \chi_r(-\omega)$. Hätte die Suszeptibilität keinen Imaginärteil, dann gäbe es auch keine Dissipation!

d) Bestimmen Sie die pro Periode $\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}$ in Wärme umgewandelte Energie

$$\dot{Q} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} F_{\mathrm{e}}(t)\langle \dot{x}(t)\rangle dt,$$

als Funktion von Ω, F_0 und $\mathrm{Im}\tilde{\chi}(\Omega)$.
Hinweis: Es gilt

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \phi)dt = \frac{\sin(\phi)}{2}$$

Lösung:

Die pro Periode in Wärme umgewandelte Energie ist gegeben durch

$$\dot{Q} = -F_0\Omega C \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \phi)dt = -\frac{1}{2} F_0 \Omega C \sin(\phi).$$

Verwendet man

$$C = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}} \qquad \text{und} \qquad \phi = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$$

und die Relation

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

erhält man

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}F_0\Omega\frac{F_0}{m}\frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2} = \frac{1}{2}F_0^2\,\Omega\,\mathrm{Im}\,\tilde{\chi}(\Omega)$$

e) Verwenden Sie das klassische (verallgemeinerte) Fluktuations-Dissipations-Theorem

$$\tilde{C}_{xx}(\omega) = -\frac{2k_BT}{\omega}\,\mathrm{Im}\tilde{\chi}_{xx}(\omega)$$

und $\tilde{\chi}(\omega) = -\tilde{\chi}_{xx}(\omega)$ um den (bereits bekannten) Zusammenhang zwischen A und γ zu berechnen.

Lösung:

Eine räumlich konstante Kraft $F_\mathrm{e}(t)$ liefert in der Hamiltonfunktion den Beitrag

$$H = H_0 - xF_\mathrm{e}(t).$$

Die Kraft koppelt also an die Größe $A = -x$ was man als $\chi = \chi_{x(-x)}$ notieren könnte. Das negative der Kraft $-F_\mathrm{e}(t)$ hingegen koppelt an den Größe $A = x$ was man als χ_{xx} notiert. Beide Response unterscheiden sich aber nur durch ein Vorzeichen, weshalb $\chi = \chi_{x(-x)} = -\chi_{xx}$ gilt. Setzt man in das klassische (verallgemeinerte) Fluktuations-Dissipations-Theorem ein erhält man

$$\frac{A^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \frac{2k_BT}{\omega}\frac{1}{m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2},$$

woraus

$$A^2 = \frac{2k_BT\gamma}{m}$$

folgt.

Bemerkung:

Das klassische (verallgemeinerte) Fluktuations-Dissipations-Theorem

$$\tilde{C}_{AB}(\omega) = -\frac{2k_BT}{\omega}\,\mathrm{Im}\tilde{\chi}_{AB}(\omega)$$

wurde in der Vorlesung als Grenzwert aus der Quantenmechanik gewonnen. Diese Relation kann auch innerhalb der klassischen Physik hergeleitet werden und gilt insbesondere auch für die Langevin-Gleichung. Dann ist $C_{AB}(t) = \langle A(\tau)B(\tau+t)\rangle$ die klassische Korrelationsfunktion im Gleichgewicht (ohne externer Störung!) und $\tilde{\chi}_{AB}(\omega)$ beschreibt die lineare Beziehung $\tilde{B}(\omega) = \tilde{\chi}_{AB}(\omega)\tilde{F}(\omega)$ zwischen der beobachteten Größe $B(t)$ und einer externen Störung $F(t)$ die in der Hamiltonfunktion $H = H_0 + AF(t)$ an die Größe A koppelt.

3. **Klassisches Wärmerauschen eines Widerstandes**

In einem Leiter (Widerstand) mit (kleiner) Querschnittsfläche A und (großer) Länge L entsteht im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T aufgrund thermischer Fluktuationen ein stochastisches (lokales) internes elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\rm th}(\mathbf{r},t)$. Die induzierte (lokale) Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, wird im Drude-Modell beschrieben durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\frac{ne^2}{m}\mathbf{E}_{\rm th}(\mathbf{r},t).$$

a) Zeigen Sie, dass der Gesamtstrom $J(t)$ und die Spannungsdifferenz $U_{\rm th}(t)$ zwischen den beiden Enden des Leiters durch die Gleichung

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t)+R_0J(t)=U_{\rm th}(t)$$

verknüpft sind, wobei R_0 den (Gleichstrom-)Widerstand bezeichnet.
Hinweis: Für den Gesamtstrom entlang der Leiterachse $\mathbf{e}_z$ und für die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Enden des Leiters gilt

$$J(t)=\frac{1}{L}\int_{\rm Leiter}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)dV \qquad \text{und} \qquad U_{\rm th}(t)=\frac{1}{A}\int_{\rm Leiter}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{E}_{\rm th}(\mathbf{r},t)dV.$$

Lösung:

Multipliziert man die (lokale) Bewegungsgleichung des Drude-Modell mit $\mathbf{e}_z$ und integriert über das Leitervolumen, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\int_{\rm Leiter}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)dV+\gamma\int_{\rm Leiter}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)dV=\frac{ne^2}{m}\int_{\rm Leiter}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{E}_{\rm th}(\mathbf{r},t)dV,$$

woraus

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t)+R_0J(t)=U_{\rm th}(t)$$

mit $R_0=\frac{\gamma mL}{Ane^2}$ folgt.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der spektralen Leistungsdichte des Stromes $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ und spektralen Leistungsdichte der Spannung $\tilde{C}_{UU}(\omega)$.

Lösung:

Aus der stochastischen Differentialgleichung

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t)+R_0J(t)=U_{\rm th}(t)$$

folgt durch Multiplikation mit $e^{i\omega t}$ und anschließender Integration

$$\frac{R_0}{\gamma}\int_T\frac{d}{dt}J(t)e^{i\omega t}+R_0\int_T J(t)e^{i\omega t}=\int_T U_{\rm th}(t)e^{i\omega t}.$$

Den ersten Term kann man durch partielle Integration umschrieben in

$$\int_T\frac{d}{dt}J(t)e^{i\omega t}=J(t)e^{i\omega t}\Big|_{t_1}^{t_2}-i\omega\int_T J(t)e^{i\omega t}.$$

Für sehr große T kann der Randterm vernachlässigt werden, da die beiden anderen Terme im Fall $T \to \infty$ geben unendlich gehen, der Randterm aber endlich bleibt. Daraus folgt weiter

$$-i\omega\frac{R_0}{\gamma}\tilde{J}_T(\omega) + R_0\tilde{J}_T(\omega) = \tilde{U}_T(\omega)$$
$$\left(\frac{R_0^2\omega^2}{\gamma^2} + R_0^2\right)|\tilde{J}_T(\omega)|^2 = |\tilde{U}_T(\omega)|^2.$$

Unter Verwendung des Wiener-Chintschin-Theorems lassen sich die spektralen Leistungsdichten $\tilde{C}_{UU}(\omega)$ und $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ in Beziehung bringen

$$\tilde{C}_{UU}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|\tilde{U}_T(\omega)|^2}{T} = \Big(\frac{R_0^2\omega^2}{\gamma^2} + R_0^2\Big)\lim_{T\to\infty}\frac{|\tilde{J}_T(\omega)|^2}{T} = \Big(\frac{R_0^2\omega^2}{\gamma^2} + R_0^2\Big)\tilde{C}_{JJ}(\omega).$$

c) Berechnen Sie mithilfe der (klassischen) Green-Kubo-Formel $\tilde{C}_{UU}(\omega)$ als Funktion von R_0 und T.
Hinweis: Betrachten Sie nur den Realteil der Green-Kubo-Formel und drücken Sie die rechte Seite durch $\tilde{C}_{JJ}(\omega)$ aus.

Lösung:

Betrachtet man den Realteil der Green-Kubo-Formel erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{A}{L}\mathrm{Re}\sigma(\omega) &= \frac{1}{2}\frac{A}{L}\Big(\sigma(\omega) + \sigma^*(\omega)\Big) \\
&= \frac{1}{2k_BT}\Big(\int_0^\infty C_{JJ}(t)e^{i\omega t}dt + \int_0^\infty C^*_{JJ}(t)e^{-i\omega t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{2k_BT}\Big(\int_0^\infty C_{JJ}(t)e^{i\omega t}dt + \int_0^\infty C_{JJ}(-t)e^{-i\omega t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{2k_BT}\int_{-\infty}^\infty C_{JJ}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2k_BT}\tilde{C}_{JJ}(\omega),
\end{aligned}$$

wobei die (auch in der Quantenmechanik) gültige Relation $C^*_{JJ}(t) = C_{JJ}(-t)$ verwendet wurde. Die klassische Autokorrelationsfunktion ist sogar reell. Wie im 5.Tutorium (Beispiel 4) gezeigt wurde ist der Realteil der Leitfähigkeit im Drude-Modell gegeben durch

$$\mathrm{Re}\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{\gamma}{\omega^2+\gamma^2} = \frac{L}{AR_0}\frac{\gamma^2}{\omega^2+\gamma^2},$$

woraus für die spektralen Leistungsdichte der Spannungsfluktuationen folgt

$$\tilde{C}_{UU}(\omega) = \Big(\frac{R_0^2}{\gamma^2} + R_0^2\Big)\tilde{C}_{JJ}(\omega) = 2k_BT\Big(\frac{R_0^2}{\gamma^2} + R_0^2\Big)\frac{A}{L}\mathrm{Re}\sigma(\omega) = 2k_BTR_0$$

Bemerkung:

Die Green-Kubo-Formel wurde in der Vorlesung als klassischer Grenzfall aus der Quantenmechanik hergeleitet. Sie gilt mit der klassischen Autokorrelationsfunktion $C_{JJ}(t)$ auch für klassische Systeme.

d) Zeigen Sie dass, die Spannung als $U_{\text{th}}(t) = U_0\xi(t)$ geschrieben werden kann, wobei die stochastische Variable $\xi(t)$ unkorreliert $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$ und ungerichtet $\langle\xi(t)\rangle = 0$ ist. Bestimmen Sie U_0.

Lösung:

Die spektrale Leistungsdichte der Spannung $\tilde{C}_{UU}(\omega)$ ist unabhängig von ω. Es handelt sich also um weißes Rauschen, welches als

$$U_{\text{th}}(t) = \sqrt{2k_BTR_0}\,\xi(t)$$

modelliert werden kann.

e) Verbindet man die beiden Enden des Leiters mit einem Kondensator der Kapazität C und Ladung $Q(t)$, führt dies zu einem zusätzlichen Spannungsterm

$$\frac{R_0}{\gamma}\frac{d}{dt}J(t) + R_0J(t) = U_{\text{th}}(t) - \frac{Q(t)}{C}.$$

Zeigen Sie, dass im Gleichgewichtszustand die mittlere gespeicherte Energie im Kondensator gegeben ist durch

$$\langle E\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} = \frac{k_BT}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\dot{Q}(t) = J(t)$ und $U_{\text{th}}(t) = U_0\xi(t)$ sowie das Resultat aus dem 4. Tutorium (Beispiel 3).

Lösung:

Die Ladung $Q(t)$ des Kondensators erfüllt die Gleichung

$$\ddot{Q}(t) + \gamma\dot{Q}(t) + \frac{\gamma}{CR_0}Q(t) = \frac{\gamma}{R_0}\sqrt{2k_BTR_0}\xi(t).$$

Dies entspricht dem stochastisch getriebenen harmonischen Oszillator aus dem 4.Tutorium (Beispiel 3) mit den Parametern

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma}{CR_0} \qquad \text{und} \qquad A' = \frac{\gamma}{R_0}\sqrt{2k_BTR_0}.$$

Mit dem Resultat aus dem 4.Tutorium (Beispiel 3) erhält man

$$\langle E\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} = \frac{1}{2C}\frac{A'^2}{2\omega_0^2\gamma} = \frac{k_BT}{2}.$$

Bemerkung:

Die mittlere gespeicherte Energie im Kondensator lässt sich alternativ auch als Integral der spektrale Leistungsdichte berechnen

$$\begin{aligned}\langle E\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} &= \frac{1}{2C}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{C}_{QQ}(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2C}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A'^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}d\omega = \frac{1}{2C}\frac{A'^2}{2\omega_0^2\gamma} = \frac{k_BT}{2}\end{aligned}$$