7. Tutorium Statistische Physik II UE, 17.06.2019

1. **Quantenmechanisches Wärmerauschen**

   Betrachten Sie einen Leiter mit (kleiner) Querschnittsfläche A, (großer) Länge L und Leitfähigkeit

   $$\sigma(\omega) = \frac{L}{AR_0}\frac{\gamma}{\gamma - i\omega} \qquad \text{mit } R_0 = \frac{\gamma m L}{Ane^2}$$

   der sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T befindet. Die Operatoren der Ladungsverschiebung und des Stromflusses sind

   $$\hat{D}_I = e\sum_i \hat{z}_I^i \qquad \text{und} \qquad \hat{J}_I = -\frac{1}{L}\frac{d\hat{D}_I}{dt}.$$

   a) Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen $\tilde{\chi}_{DD}(\omega)$ und $\tilde{\chi}_{JD}(\omega)$. Welcher Größe entspricht $\tilde{\chi}_{JD}(\omega)$?
   Hinweis: Leiten Sie $\chi_{DD}(t)$ nach der Zeit ab.

   b) Zeigen Sie mithilfe des quantenmechanischen Fluktuations-Dissipations-Theorems die Relation

   $$\tilde{C}_{DD}(\omega) = \frac{LA}{\omega}\frac{2\hbar}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\mathrm{Re}\sigma(\omega).$$

   c) Im Experiment beobachtet man nicht $C_{UU}(t)$ selbst, sondern den Realteil $S_{UU}(t) = \mathrm{Re}\, C_{UU}(t)$. Zeigen Sie, dass die spektrale Leistungsdichte der quantenmechanischen Spannungsfluktuationen gegeben ist durch

   $$\tilde{S}_{UU}(\omega) = 2R_0\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right).$$

   Warum kann es in der Natur kein echtes weißes Rauschen geben?
   Hinweis: Sie können die folgende Relation verwenden

   $$\tilde{C}_{DD}(\omega) = \frac{L^2}{\omega^2}\tilde{C}_{JJ}(\omega) = \frac{A^2}{\omega^2}|\sigma(\omega)|^2\tilde{C}_{UU}(\omega).$$

   d) Wie im 6.Tutorium (Beispiel 3e) wird der Leiter an einen Kondensator angeschlossen

   $$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) + \gamma\frac{d}{dt}Q(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{1}{\mu}U_{\mathrm{th}}(t),$$

   mit $\mu = \frac{mL}{Ane^2}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{C\mu}$. Die Spannungsfluktuationen $U_{\mathrm{th}}(t)$ sind charakterisiert durch $\tilde{S}_{UU}(\omega)$. Berechnen Sie im Limes $\gamma \to 0$ (Supraleitung) die mittlere Gesamtenergie bestehend aus Ladungsenergie des Kondensators plus kinetischer Energie der Elektronen

   $$\langle E_{\mathrm{tot}}\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} + \frac{\mu\langle \dot{Q}^2(t)\rangle}{2}.$$

   Vergleichen Sie mit dem quantenmechanischen harmonischen Oszillator!
   Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{C}_{\dot{Q}\dot{Q}}(\omega) = \omega^2\tilde{C}_{QQ}(\omega)$ und

   $$\delta(\omega - \omega_0) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\omega_0^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\omega^2}{\omega_0^2\pi}\frac{\omega_0^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

2. **Kritische Exponenten im Van-der-Waals-Gas**

   Betrachten Sie das Van-der-Waals-Gas in der Umgebung des kritischen Punktes.

   a) Zeigen Sie, dass entlang der kritischen Isotherme $T = T_c$ für $V \to V_c$ die Relation
   $$P - P_c \sim (V - V_c)^\delta$$
   gilt und berechnen Sie den kritischen Exponenten δ.

   b) Zeigen Sie, dass entlang der kritischen Isochore $V = V_c$ für $T > T_c$ und $T \to T_c$ die isotherme Kompressibilität κ_T mit
   $$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-\gamma}$$
   skaliert und berechnen Sie den kritischen Exponenten γ.

3. **Ising-Modell in einer Dimension**

   Betrachten Sie das Ising-Model bestehend aus N Spins $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ in einer Dimension mit **offenen** Randbedingungen
   $$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \mu_B B_{\text{ext}} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$
   wobei J die Spin-Spin-Wechselwirkung und B_{ext} ein externes Magnetfeld ist.

   a) Berechnen Sie im Fall $B_{\text{ext}} = 0$ und $J \neq 0$ die kanonische Zustandssumme Z_N.
   Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Rekursion $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(\beta J)$.

   b) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der kanonische Zustandssumme im Fall $J = 0$ und $B_{\text{ext}} \neq 0$ für $N - 1$ Spins. Für welchen Wert von B_{ext} sind die beiden Zustandssummen (bis auf einen Faktor) gleich? Argumentieren Sie, warum eine ähnliche Korrespondenz in höheren Dimensionen nicht möglich ist.

   c) Zeigen Sie, dass im Fall $B_{\text{ext}} = 0$ die (räumliche) Spin-Autokorrelationsfunktion gegeben ist durch
   $$C_{\sigma\sigma}(r) = \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \qquad \text{mit} \qquad \xi = \frac{1}{\ln\Big(\coth(\beta J)\Big)}.$$
   Wie verhält sich die Korrelationslänge ξ für niedrige Temperaturen $T \to 0$?
   Hinweis: Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_N zum Hamiltonian
   $$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1},$$
   mithilfe der Rekursion $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(\beta J_N)$ und leiten Sie diese nach $J_i, ..., J_{i+r-1}$ ab. Verwenden Sie $\sigma_i^2 = 1$ und setzten Sie anschließend $J_i = J$.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1abc/1d/2/3ab/3c