Lösungen zum 7. Tutorium Statistische Physik II UE, 17.06.2019

1. **Quantenmechanisches Wärmerauschen**

   Betrachten Sie einen Leiter mit (kleiner) Querschnittsfläche A, (großer) Länge L und Leitfähigkeit
   $$\sigma(\omega) = \frac{L}{AR_0}\frac{\gamma}{\gamma - i\omega} \qquad \text{mit } R_0 = \frac{\gamma m L}{Ane^2}$$
   der sich im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T befindet. Die Operatoren der Ladungsverschiebung und des Stromflusses sind
   $$\hat{D}_I = e\sum_i \hat{z}_I^i \qquad \text{und} \qquad \hat{J}_I = -\frac{1}{L}\frac{d\hat{D}_I}{dt}.$$

   a) Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen $\tilde{\chi}_{DD}(\omega)$ und $\tilde{\chi}_{JD}(\omega)$. Welcher Größe entspricht $\tilde{\chi}_{JD}(\omega)$?
   Hinweis: Leiten Sie $\chi_{DD}(t)$ nach der Zeit ab.

   Lösung:

   Die zum Ladungsverschiebungsoperator $\hat{D}$ zugehörige externe Störung
   $$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{D}E(t)$$
   ist das elektrische Feld $E(t)$. Die (verallgemeinerte) Suszeptibilität
   $$\chi_{DD}(t) = \frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle[\hat{D}_I(0), \hat{D}_I(t)]\rangle_0.$$
   beschreibt den (linearen) Zusammenhang zwischen mittlerer Ladungsverschiebung (Polarisation) und elektrischem Feld $E(t)$. Leitet man $\chi_{DD}(t)$ nach der Zeit ab folgt
   $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\chi_{DD}(t) &= \frac{i}{\hbar}\delta(t)\langle[\hat{D}_I(0), \hat{D}_I(0)]\rangle_0 + \frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle[\hat{D}_I(0), \frac{d\hat{D}_I(t)}{dt}]\rangle_0 \\ &= -L\frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle[\hat{D}_I(0), \hat{J}_I(t)]\rangle_0 \\ &= -L\chi_{JD}(t)\end{aligned}$$
   und daher
   $$\tilde{\chi}_{DD}(\omega) = -i\frac{L}{\omega}\tilde{\chi}_{JD}(\omega).$$
   Die (verallgemeinerte) Suszeptibilität $\tilde{\chi}_{JD}(\omega)$ beschreibt den (linearen) Zusammenhang zwischen mittlerem Strom J und elektrischem Feld $E(t)$. Es gilt daher $\tilde{\chi}_{JD}(\omega) = A\sigma(\omega)$.

b) Zeigen Sie mithilfe des quantenmechanischen Fluktuations-Dissipations-Theorems die Relation

$$\tilde{C}_{DD}(\omega) = \frac{LA}{\omega}\frac{2\hbar}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{Re}\sigma(\omega).$$

Lösung:

Das quantenmechanische Fluktuations-Dissipations-Theorem für $\tilde{\chi}_{DD}(\omega)$ gibt

$$\tilde{C}_{DD}(\omega) = \frac{2\hbar}{1-e^{\beta\hbar\omega}}\mathrm{Im}\tilde{\chi}_{DD}(\omega) = \frac{L}{\omega}\frac{2\hbar}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{Re}\tilde{\chi}_{JD}(\omega) = \frac{LA}{\omega}\frac{2\hbar}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{Re}\sigma(\omega).$$

c) Im Experiment beobachtet man nicht $C_{UU}(t)$ selbst, sondern den Realteil $S_{UU}(t) = \mathrm{Re}\, C_{UU}(t)$. Zeigen Sie, dass die spektrale Leistungsdichte der quantenmechanischen Spannungsfluktuationen gegeben ist durch

$$\tilde{S}_{UU}(\omega) = 2R_0\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right).$$

Warum kann es in der Natur kein echtes weißes Rauschen geben?
Hinweis: Sie können die folgende Relation verwenden

$$\tilde{C}_{DD}(\omega) = \frac{L^2}{\omega^2}\tilde{C}_{JJ}(\omega) = \frac{A^2}{\omega^2}|\sigma(\omega)|^2\tilde{C}_{UU}(\omega).$$

Lösung:

Verwendet man die Relation im Hinweis und setzt für $\tilde{C}_{DD}(\omega)$ das Resultat des quantenmechanischen Fluktuations-Dissipations-Theorems ein, so folgt

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{UU}(\omega) &= \frac{\omega^2}{A^2|\sigma(\omega)|^2}\tilde{C}_{DD}(\omega)\\ &= \frac{\omega^2}{A^2|\sigma(\omega)|^2}\frac{LA}{\omega}\frac{2\hbar}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{Re}\sigma(\omega)\\ &= \frac{L}{A}\frac{2\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\frac{\mathrm{Re}\sigma(\omega)}{|\sigma(\omega)|^2} = \frac{2\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}R_0\end{aligned}$$

Für den Realteil der Spannungsfluktuationen gilt

$$S_{UU}(t) = \mathrm{Re}\, C_{UU}(t) = \frac{1}{2}\Big(C_{UU}(t) + (C_{UU}(t))^*\Big)$$

und weil $\tilde{C}_{UU}(\omega)$ reell ist, folgt im Fourier-Raum

$$\tilde{S}_{UU}(\omega) = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{UU}(\omega) + \tilde{C}_{UU}(-\omega)) = 2R_0\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right).$$

Bemerkung: Es gibt kein echtes weißes Rauschen, weil mit jeder Frequenz ω eine Energiequant $\hbar\omega$ verbunden ist und für hohe Frequenzen $\omega > k_BT/\hbar$ die thermische Energie k_BT nicht mehr ausreicht um eine Quant zu erzeugen. Bei Raumtemperatur werden daher Schwingungen ab Terahertz thermisch nicht mehr angeregt. Es verbleiben nur die Nullpunktfluktuationen. Üblicherweise treten diese nicht in Erscheinung und werden ignoriert. Es gibt jedoch sehr spezielle Versuchsanordnungen in denen die Nullpunktfluktuationen eine Rolle spielen (siehe Casimir-Effekt!).

d) Wie im 6.Tutorium (Beispiel 3e) wird der Leiter an einen Kondensator angeschlossen

$$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) + \gamma\frac{d}{dt}Q(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{1}{\mu}U_{\text{th}}(t),$$

mit $\mu = \frac{mL}{Ane^2}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{C\mu}$. Die Spannungsfluktuationen $U_{\text{th}}(t)$ sind charakterisiert durch $\tilde{S}_{UU}(\omega)$. Berechnen Sie im Limes $\gamma \to 0$ (Supraleitung) die mittlere Gesamtenergie bestehend aus Ladungsenergie des Kondensators plus kinetischer Energie der Elektronen

$$\langle E_{\text{tot}}\rangle = \frac{\langle Q^2(t)\rangle}{2C} + \frac{\mu\langle \dot{Q}^2(t)\rangle}{2}.$$

Vergleichen Sie mit dem quantenmechanischen harmonischen Oszillator!
Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{C}_{\dot{Q}\dot{Q}}(\omega) = \omega^2\tilde{C}_{QQ}(\omega)$ und

$$\delta(\omega - \omega_0) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\omega_0^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\omega^2}{\omega_0^2\pi}\frac{\omega_0^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}.$$

Lösung:

Die mittlere Gesamtenergie lässt sich als Integral darstellen

$$\langle E_{\text{tot}}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2C}\tilde{C}_{QQ}(\omega) + \frac{\mu}{2}\tilde{C}_{\dot{Q}\dot{Q}}(\omega)\Big)d\omega.$$

Mit $\tilde{C}_{\dot{Q}\dot{Q}}(\omega) = \omega^2\tilde{C}_{QQ}(\omega)$ folgt für die mittlere Gesamtenergie

$$\langle E_{\text{tot}}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2C} + \frac{\mu\omega^2}{2}\Big)\tilde{C}_{QQ}(\omega)d\omega.$$

Die spektrale Leistungsdichte $\tilde{C}_{QQ}(\omega)$ folgt aus dem Wiener-Chintschin-Theorem

$$\tilde{C}_{QQ}(\omega) = \frac{1}{\mu^2}\frac{\tilde{S}_{UU}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}.$$

Setzt man in die Integraldarstellung der Gesamtenergie ein und betrachtet den Limes $\gamma \to 0$ so folgt

$$\begin{aligned}
\langle E_{\text{tot}}\rangle &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2C} + \frac{\mu\omega^2}{2}\Big)\tilde{C}_{QQ}(\omega)d\omega \\
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{2C} + \frac{\mu\omega^2}{2}\Big)\frac{1}{\mu^2}\frac{\tilde{S}_{UU}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}d\omega \\
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{R_0}{C\mu^2} + \frac{R_0\omega^2}{\mu}\Big)\frac{\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}d\omega \\
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Big)\frac{\omega_0^2\gamma\Big(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\Big)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}d\omega \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{e^{\beta\hbar\omega_0}-1}.
\end{aligned}$$

Weiterführende Bemerkung: Die Gesamtenergie im Schaltkreis verhält sich wie die Energie des quantenmechanischen Oszillators mit Frequenz ω_0, der sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T befindet. Im Grenzfall $T \to 0$ verschwindet die thermische Anregung und es bleibt nur die Grundzustandsenergie $\frac{\hbar}{2}|\omega_0|$. Die thermische Anregung wird durch die effektive spektrale Leistungsdichte

$$\tilde{S}_{UU}^{\text{eff}}(\omega) = \tilde{S}_{UU}(\omega) - R_0\hbar|\omega|$$

erzeugt. Anregungen können direkt gemessen und verstärkt werden, weshalb oft $\tilde{S}_{UU}^{\text{eff}}(\omega)$ als eigentliche spektrale Leistungsdichte der Spannungsfluktuationen verwendet wird. Interessiert man sich beispielsweise für die am kurzgeschlossen Widerstand dissipierende Leistung erhält man den endlichen Wert

$$P_{\text{KS}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R_0}\tilde{S}_{UU}^{\text{eff}}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{R_0}2\tilde{S}_{UU}^{\text{eff}}(\omega)d\omega = \frac{2\pi}{6\hbar\beta^2}.$$

Falls Sie sich weitergehend mit dem Wärmerauschen beschäftigen, sei noch erwähnt, dass in der Literatur die spektrale Leistungsdichte der Spannungsfluktuation oft nur auf positive Frequenzen bezogen wird, weshalb sich ein zusätzlicher Faktor 2 ergibt und dann nur über positive Frequenzen integriert wird.

2. **Kritische Exponenten im Van-der-Waals-Gas**

Betrachten Sie das Van-der-Waals-Gas in der Umgebung des kritischen Punktes.

a) Zeigen Sie, dass entlang der kritischen Isotherme $T = T_c$ für $V \to V_c$ die Relation

$$P - P_c \sim (V - V_c)^\delta$$

gilt und berechnen Sie den kritischen Exponenten δ.

Lösung:

Setzt man in die Taylor-Entwicklung am kritischen Punkt (siehe 5.Plenum)

$$\tilde{P}(\tilde{V}, \tilde{T}) \simeq 4\tilde{T} - 6\tilde{T}\tilde{V} - \frac{3}{2}\tilde{V}^3$$

die Temperatur $\tilde{T} = 0$ und multipliziert mit $P_c V_c$, erhält man

$$P - P_c \simeq -\frac{3P_c V_c^3}{2}(V - V_c)^3 \sim (V - V_c)^3,$$

woraus $\delta = 3$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass entlang der kritischen Isochore $V = V_c$ für $T > T_c$ und $T \to T_c$ die isotherme Kompressibilität κ_T mit

$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-\gamma}$$

skaliert und berechnen Sie den kritischen Exponenten γ.

Lösung:

Die isotherme Kompressibilität lässt sich in reduzierten Koordinaten $\tilde{T}, \tilde{V}, \tilde{P}$ (siehe 5.Plenum) darstellen als

$$\kappa_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = \frac{1}{P_c(\tilde{V}+1)}\frac{1}{\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}}\right)_{T,N}} \simeq -\frac{1}{P_c(\tilde{V}+1)}\frac{1}{6\tilde{T} + \frac{9}{2}\tilde{V}^2}.$$

Entlang der kritischen Isochore $\tilde{V} = 0$ und $T > T_c$ folgt

$$\kappa_T \simeq -\frac{1}{6P_c}\frac{1}{\tilde{T}} = -\frac{T_c}{6P_c}(T - T_c)^{-1} \sim (T - T_c)^{-1}.$$

Der kritische Exponent ist also $\gamma = 1$.

3. **Ising-Modell in einer Dimension**

Betrachten Sie das Ising-Model bestehend aus N Spins $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ in einer Dimension mit **offenen** Randbedingungen

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \mu_B B_{\text{ext}} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$

wobei J die Spin-Spin-Wechselwirkung und B_{ext} ein externes Magnetfeld ist.

a) Berechnen Sie im Fall $B_{\text{ext}} = 0$ und $J \neq 0$ die kanonische Zustandssumme Z_N. **Hinweis:** Zeigen und verwenden Sie die Rekursion $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(\beta J)$.

Lösung:

Für $N = 2$ erhält man die kanonische Zustandssumme

$$Z_2 = 2e^{\beta J} + 2e^{-\beta J} = 4\cosh(\beta J).$$

Fügt man nun zum System bestehend aus N Spins mit Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} e^{-\beta H(\sigma_1,\dots,\sigma_N)}$$

einen weiteren Spin hinzu, so ergeben sich für jede Konfiguration $\{\sigma_1, .., \sigma_N\}$ mit Energie $H(\sigma_1, ..., \sigma_N)$ zwei neue Konfigurationen $\{\sigma_1, .., \sigma_N, +1\}$ und $\{\sigma_1, .., \sigma_N, -1\}$, wobei eine davon die Energie $H(\sigma_1, ..., \sigma_N) + J$ und eine die Energie $H(\sigma_1, ..., \sigma_N) - J$ besitzt. Insgesamt erhält man daher

$$Z_{N+1} = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} e^{-\beta H(\sigma_1,\dots,\sigma_N)} e^{\beta J} + \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_N} e^{-\beta H(\sigma_1,\dots,\sigma_N)} e^{-\beta J} = 2Z_N \cosh(\beta J),$$

woraus schließlich

$$Z_N = 2^N \cosh^{N-1}(\beta J)$$

folgt.

b) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der kanonische Zustandssumme im Fall $J = 0$ und $B_{\text{ext}} \neq 0$ für $N - 1$ Spins. Für welchen Wert von B_{ext} sind die beiden Zustandssummen (bis auf einen Faktor) gleich? Argumentieren Sie, warum eine ähnliche Korrespondenz in höheren Dimensionen nicht möglich ist.

Lösung:

Die kanonische Zustandssumme für ein System aus $N-1$ Spins ohne Wechselwirkung lässt sich aus der kanonische Zustandssumme eines Spins $Z_1 = 2\cosh(\beta\mu_B B_{\text{ext}})$ berechnen durch

$$Z_{N-1} = Z_1^{N-1} = 2^{N-1} \cosh^{N-1}(\beta\mu_B B_{\text{ext}}).$$

Bis auf einen Faktor 2 stimmt also die kanonische Zustandssumme des Ising-Modells ohne Feld mit der kanonische Zustandssumme des Ising-Modells ohne

Wechselwirkung überein wenn $J = \mu_B B_{\text{ext}}$. Wichtig: Dies ist ein Spezialfall des Ising Modells in **einer** Dimension. In zwei Dimensionen gilt dieser Zusammenhang nicht mehr, weil jeder Spin nun mehr als zwei Nachbarn besitzt. Tatsächlich zeigt das Ising-Modell in zwei Dimensionen einen (ferro)magnetischen Phasenübergang, der in einem System ohne Wechselwirkung natürlich niemals vorkommen kann.

c) Zeigen Sie, dass im Fall $B_{\text{ext}} = 0$ die (räumliche) Spin-Autokorrelationsfunktion gegeben ist durch

$$C_{\sigma\sigma}(r) = \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \qquad \text{mit} \qquad \xi = \frac{1}{\ln\Big(\coth(\beta J)\Big)}.$$

Wie verhält sich die Korrelationslänge ξ für niedrige Temperaturen $T \to 0$?
Hinweis: Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_N zum Hamiltonian

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1},$$

mithilfe der Rekursion $Z_{N+1} = 2 Z_N \cosh(\beta J_N)$ und leiten Sie diese nach $J_i, ..., J_{i+r-1}$ ab. Verwenden Sie $\sigma_i^2 = 1$ und setzten Sie anschließend $J_i = J$.

Lösung:

Mit der lokalen Wechselwirkung J_i ergibt sich die kanonischen Zustandssumme

$$Z_N = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh(\beta J_i).$$

Die Spin-Autokorrelationsfunktion $C_{\sigma\sigma}(r)$ lässt sich darstellen über

$$\begin{aligned}
C_{\sigma\sigma}(r) = \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_N} \sigma_i \sigma_{i+r}\, e^{-\beta H(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)} \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_N} \sigma_i \sigma_{i+1}^2 \ldots \sigma_{i+r-1}^2 \sigma_{i+r}\, e^{-\beta H(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)} \\
&= \frac{1}{Z_N} \frac{1}{\beta^r} \frac{d}{dJ_i} \frac{d}{dJ_{i+1}} \cdots \frac{d}{dJ_{i+r-1}} Z_N \\
&= \frac{\sinh^r(\beta J)}{\cosh^r(\beta J)} = \tanh^r(\beta J) = e^{-\frac{r}{\xi}},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $J_i = J$ gesetzt wurde.
Im Grenzfall kleiner Temperaturen ist die thermische Energie $k_B T$ klein im Vergleich zur Wechselwirkungsenergie J. Dies führt zu einer langreichweitigen Ordnung, was sich durch eine große Korrelationslänge ξ bemerkbar macht. Dass die Divergenz der Korrelationslänge erst bei $T = 0$ und nicht bei endlicher Temperatur $T_c > 0$ auftritt, ist ein weiteres Indiz dafür, dass es im **eindimensionalen** Ising-Modell keinen magnetischen Phasenübergang gibt.