**Gerhard Kahl & Florian Libisch**

# STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

## 1. Tutoriumstermin (17.4.2023)

**T1.** Gegeben ist die Zustandsgleichung des van der Waals Gases

$$\left(P + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_{\mathrm{B}}T.$$

(a) Berechnen Sie den kritischen Punkt (also $T_{\mathrm{c}}$, $P_{\mathrm{c}}$, und $V_{\mathrm{c}}$), der durch die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

festgelegt ist.

Schreiben Sie die van der Waals Gleichung in reduzierten, dimensionslosen Variablen $T^* = T/T_{\mathrm{c}}$, $P^* = P/P_{\mathrm{c}}$ und $V^* = V/V_{\mathrm{c}}$ an.

(b) Führen Sie nun die Größen

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c} \qquad \pi = \frac{P - P_c}{P_c} \qquad \omega = \frac{V - V_c}{V_c}$$

ein, die in der Nähe des kritischen Punktes kleine Werte (typischerweise $10^{-4}$ und kleiner) annehmen.

Leiten Sie einen Näherungsausdruck für die Zustandsgleichung des van der Waals Gases in der Nähe des kritischen Punktes unter Verwendung von $\tau$, $\pi$, und $\omega$ her, wobei Sie Terme bis zur dritten Ordnung in diesen Größen berücksichtigen sollen.

**Hinweis:** verwenden Sie

$$(1 + x)^{-1} \sim 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \text{und} \qquad (1 + x)^{-2} \sim 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

**T2.** Die van der Waals Gleichung in der Nähe des kritischen Punktes lautet (als Endergebnis von Beispiel T1)

$$\pi \sim 4\tau - 6\tau\omega + 9\tau\omega^2 - \frac{3}{2}\omega^3; \tag{1}$$

in dieser Gleichung sind die thermodynamischen Variablen $T$, $P$, und $V$, durch die entsprechenden reduzierten, dimensionlosen Größen $\tau$, $\pi$, und $\omega$ mit

$$\tau = \frac{T - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} \qquad \pi = \frac{P - P_\mathrm{c}}{P_\mathrm{c}} \qquad \omega = \frac{V - V_\mathrm{c}}{V_\mathrm{c}}$$

gegeben. $\tau$, $\pi$, und $\omega$ sind typischerweise $10^{-4}$ (oder kleiner).

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) wie verhält sich die Differenz in den Koexistenzvolumnia, $|\omega_\mathrm{fl} - \omega_\mathrm{g}|$ unterhalb der kritischen Temperatur (also für $\tau < 0$) bei Annäherung an den kritischen Punkt, also bei $\tau \to 0^-$;

(b) stellen Sie einen Zusammenhang zwischen Druck $\pi$ und Volumen $\omega$ entlang der kritischen Isotherme her.

(c) In allen drei Fällen [(a) – (c)] ergeben sich für die jeweiligen Größen Potenzgesetze; vergleichen Sie die entsprechenden Gesetze und Exponenten mit jenen Gesetzen und Exponenten, die in der Vorlesung für das Ising-Modell in der Molekularfeldnäherung hergeleitet wurden. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Hinweise:**

(a) Anstelle der Koexistenzvolumina, $\omega_\mathrm{fl}$ und $\omega_\mathrm{g}$, deren explizite Berechnung im Rahmen einer Maxwell-Konstruktion [etwa durch Integration der Zustandsgleichung (1)] erfolgen müßte, reich es hier (ausnahmsweise), die Temperaturabhängigkeit der Differenz in den Volumina $\omega_1$ und $\omega_2$ zu betrachten: diese Volumina entsprechen dem Minimum und dem Maximum der Isotherme $\pi = \pi(\omega, \tau = \mathrm{const.})$.

**Zu kreuzen:** 1a, 1b, 2a, 2bc