
Gerhard Kahl & Florian Libisch
STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

2. Tutoriumstermin (24.4.2023)

T3. Berechnen Sie für das van der Waals Gas wie sich die latente Wärme, Q_L , in der Nähe des kritischen Punktes als Funktion der Temperatur verhält. Q_L läßt sich aus der Clausius-Clapeyron Gleichung ermitteln:

$$Q_L = \frac{dP_s}{dT} T(V_v - V_l) \simeq \frac{d\pi_s}{d\tau} T(\omega_v - \omega_l).$$

Dabei ist P_s (und entsprechend π_s) der Druck, bei dem bei vorgegebener Temperatur T (bzw. τ) die flüssige Phase (Index 'l') und die gasförmige Phase (Index 'v') koexistieren. Für die Rechnungen ist es zweckmäßig von folgender, alternativen Form der van der Waals Gleichung auszugehen, die wiederum in der Nähe des kritischen Punktes gültig ist:

$$\pi(\omega, \tau) \simeq -\frac{3}{2}\omega^3 + 4\tau - 6\omega\tau.$$

(a) Berechnen Sie in einem ersten Schritt die Koexistenzvolumina ω_l und ω_v indem Sie bei konstantem τ die Bedingungen der mechanischen Koexistenz, also

$$\pi_l = \pi_v = \pi_s$$

und der chemischen Koexistenz ("Maxwell-Konstruktion")

$$\int_{\omega_l}^{\omega_v} \pi(\omega) d\omega = \pi_s(\omega_v - \omega_l)$$

erfüllen.

Berechnen Sie daraus $\omega_l(\tau)$ und $\omega_v(\tau)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis von $|\omega_v - \omega_l|$ mit jenem aus Beispiel T2.

(b) Berechnen Sie dann $\pi_s(\tau)$ und mit den Teilergebnissen aus Punkt (a) mit Hilfe der Clausius-Clapeyron Gleichung das Verhalten der latenten Wärme $Q_L = Q_L(\tau)$ in der Nähe des kritischen Punktes.

T4. Die Wechselwirkung eines nicht-idealen Gases wird durch ein so genanntes 'square-well' Potential $\Phi(r)$ modelliert, das durch

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ -\Phi_0 & \sigma < r < \lambda\sigma \\ 0 & \lambda\sigma < r \end{cases}$$

gegeben ist. σ ist dabei der Durchmesser der Teilchen und Φ_0 ist eine Konstante und λ gibt die Reichweite des attraktiven Potentials an.

Berechnen Sie für dieses Modell (mit Hilfe der Unterlagen aus Kapitel 1) die entsprechenden van der Waals Parameter a und b (unter der Annahme, daß Φ_0 viel kleiner als $k_B T$ ist). Berechnen Sie das kritische Volumen, den kritischen Druck und die kritische Temperatur des Gases für den allgemeinen Fall und dann für den Fall, daß $\sigma = 0.1$ nm, $\lambda = 1.5$ und $\Phi_0 = 5$ meV sind.

T5. Gegeben sei eine hypothetische Substanz, für die folgende Zustandsgleichung in der Nähe des fest-flüssig Überganges berechnet wurde. Die freie Energie, $F(T, V, N)$, ist in einem limitierten Bereich von Temperatur T und Dichte $\rho = N/V$ für den flüssigen Zustand ('l') durch

$$\frac{F^{(l)}}{V} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{T} \rho^2$$

und für den festen Zustand ('s') durch

$$\frac{F^{(s)}}{V} = \frac{1}{3} \frac{\beta}{T} \rho^3$$

gegeben. α und β sind konstant.

Berechnen Sie:

- die Dichte $\rho^{(l)}$ der Flüssigkeit bzw. die Dichte $\rho^{(s)}$ des Festkörpers bei Phasenkoexistenz, jeweils als Funktion der Temperatur;
- den Druck $P_0(T)$ bei diesem Übergang als Funktion der Temperatur;
- die Entropieänderung beim Erstarren;
- mit Hilfe der Clausius-Clapeyron Gleichung

$$\frac{dP_0(T)}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v}$$

den Anstieg der Schmelzkurve dP_0/dT und daraus die Schmelzkurve $P_0 = P_0(T)$; in der obigen Gleichung stehen Δs und Δv für die Differenzen in den spezifischen Entropien und in den spezifischen Volumina (bezogen auf die jeweilige Teilchenzahl) der beiden koexistierenden Phasen.

Zu kreuzen: 3a, 3b, 4, 5ab, 5cd