Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK II (UE – 136.050)

2. Tutoriumstermin (8.5.2023)

T6. Berechnen Sie, wie sich bei Annäherung an den kritischen Punkt die Differenz in den spezifischen Wärmen, $(C_\mathrm{p} - C_\mathrm{v})$, verhält; diese Differenz ist gegeben durch (vgl. Folien zur Vorlesung)

$$(C_\mathrm{P} - C_\mathrm{V}) = TV\alpha_\mathrm{P}^2 \frac{1}{\kappa_\mathrm{T}}, \tag{1}$$

wobei der der thermische Ausdehungskoeffizient α_P und die isotherme Kompressibilität κ_T gegeben sind durch

$$\alpha_\mathrm{P} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\mathrm{P} \qquad \kappa_\mathrm{T} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\mathrm{T}.$$

Für die Aufgabenstellung (also in der Nähe des kritischen Punktes) reicht es, die folgende Relation zu betrachten

$$(C_\mathrm{P} - C_\mathrm{V}) \sim \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\mathrm{P}^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_\mathrm{T} \sim \left(\frac{\partial \omega}{\partial \tau}\right)_\pi^2 \left(\frac{\partial \pi}{\partial \omega}\right)_\tau, \tag{2}$$

wobei der letzte Term durch Einführung der Größen τ, π und ω entsteht (vgl. frühere Beispiele).

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen in Gleichung (2) empfiehlt es sich, die folgende Form der van der Waals Zustandsgleichung zu verwenden, die näherungsweise in der Nähe des kritischen Punktes gilt (sh. auch nachstehenden Hinweis):

$$8\tau = \pi(2 + 3\omega) + 3\omega^3. \tag{3}$$

Berechnen Sie, wie sich $(C_\mathrm{P} - C_\mathrm{V})$ bei Annäherung an den kritischen Punkt als Funktion der Temperatur T (bzw. von τ) verhält, wenn Sie sich

(a) entlang der kritischen Isobaren
(b) entlang der kritischen Isochoren

dem kritischen Punkt nähern.

Hinweis:
Die näherungsweise Zustandsgleichung (3) ist – wie Sie leicht nachweisen können – äquivalent zur entsprechenden näherungsweisen Zustandsgleichung, die Sie in früheren Beispielen verwendet haben.

T7. Gehen Sie von folgender exakten Relation zwischen den "response"-Funktionen eines magnetischen Systems aus, die im wesentlichen der Gleichung (1) aus Beispiel T6 entspricht:

$$\chi_T(C_H - C_M) = T\alpha_H^2.$$

Es kann angenommen werden, daß C_H, C_M, und χ_T positiv sind; weiters ist $\alpha_H \sim (\partial M/\partial T)_H$.

Leiten Sie aus den bekannten Gesetzen, die in der Nähe des kritischen Punktes ($\tau < 0$) für die verschiedenen Observablen gelten die sogenannte Rushbrook Ungleichung (ca. 1960) her:

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2.$$

T8. Im Rahmen der Widom Hypothese (vgl. Vorlesung) wird angenommen, daß das thermodynamische Potential $G = G(T, H)$ in der Nähe des kritischen Punktes eine verallgemeinerte homogene Funktion in seinen Variablen ist; es wird also angenommen, daß für beliebiges, reelles λ gilt

$$G(\lambda^{a_\tau}\tau, \lambda^{a_H}H) = \lambda G(\tau, H)$$

mit $\tau = (T - T_c)/T_c$ und vorest unbekannten Parametern a_τ und a_H.

Gehen Sie von den Standarddefinition der Wärmekapazität C_H und deren Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes $C_H \sim \tau^{-\alpha}$ aus und berechnen Sie einen Ausdruck, der α mit a_H und a_τ in Beziehung setzt.

Zu kreuzen: 6a, 6b, 7, 8