4. Tutorium UE Statistische Physik II, 22.05.2023

T9 Betrachten Sie eine eindimensionale diskrete Zufallsbewegung auf einem Gitter mit Gitterabstand Δ und der Zeit τ zwischen zwei Schritten. Die Wahrscheinlichkeit $w_1(n\Delta, (s+1)\tau)$ sich zum Zeitpunkt $t = (s+1)\tau$ (nach $s+1$ Schritten) am Punkt $x = n\Delta$ zu befinden lässt sich als Markov-Kette von Transferwahrscheinlichkeiten (Übergangswahrscheinlichkeiten) P formulieren,

$$w_1(n\Delta, (s+1)\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_1(m\Delta, s\tau)\, P(n\Delta, (s+1)\tau | m\Delta, s\tau)\ ;\ m, n \in \mathbb{Z}\,.$$

a) Wie vereinfacht sich der Ausdruck für $w_1(n\Delta, (s+1)\tau)$, wenn in jedem Schritt nur ein Gitterpunkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts zurück gelegt werden kann?

b) Bilden Sie für diesen Fall den Differenzenquotienten

$$\frac{w_1(n\Delta, (s+1)\tau) - w_1(n\Delta, s\tau)}{\tau}\,.$$

Substituieren Sie $x := n\Delta$ und $t := s\tau$ und betrachten Sie den Grenzfall ($\Delta \to 0, \tau \to 0$) für konstantes Verhältnis Δ^2/τ.

c) Wie können Sie die resultierende Differentialgleichung für $w_1(x,t)$ interpretieren?

T10 Ein Brown'sches Teilchen mit der Masse m bewegt sich in einer Flüssigkeit entlang einer Dimension unter dem Einfluss der Reibungskraft $-\tilde{\gamma}v(t)$ mit $\tilde{\gamma} > 0$, einer stochastisch fluktuierenden Kraft $f(t)$ und einer zusätzlichen konstanten Kraft f_0. Für die stochastische Kraft gelte $\langle f(t_2)f(t_1)\rangle = g\delta(t_2 - t_1)$ und $\langle f(t)\rangle = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort x_0 mit der Geschwindigkeit v_0.

a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung (Langevin Gleichung) des Teilchens an und interpretieren Sie die angegebenen Eigenschaften der stochastischen Kraft $f(t)$.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion $\langle v(t_2)v(t_1)\rangle$.

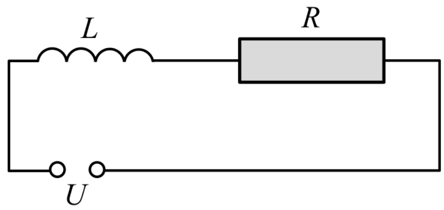
Bitte wenden!

T11 Auf der mikroskopischen Ebene wird der Strom in elektrischen Schaltungen durch die Bewegung einzelner Ladungsträger hervorgerufen. Wenn die betrachteten Ströme sehr klein sind, lassen sich auch makroskopisch stochastische Schwankungen des Stromflusses auf Grund der diskreten Natur der Ladungsträger q beobachten („Schrotrauschen"). Für den gemessenen Strom im Intervall $(0, T)$ gilt dann ungefähr

$$I(t) = q \sum_{n=1}^{N} \delta(t - t_n)\,,\ 0 \leq t_n \leq T$$

wobei der mittlere Strom $\langle I \rangle = qN/T$ beträgt. Berechnen Sie die spektrale Dichte $S_I(\omega)$ der Stromverteilung $I(t)$.

T12 Betrachten Sie einen RL-Kreis (Serienschaltung) bestehend aus einem Widerstand R und einer Induktivität L bei der Temperatur T. Aufgrund der thermischen Bewegung der Elektronen entsteht in dem Schaltkreis ein stochastischer elektrischer Strom („Johnson-Nyquist-Rauschen"). Die resultierende stochastische Spannung schwankt um Null ($\langle U(t) \rangle = 0$) und ist delta-korreliert $\langle U(t_2)U(t_1) \rangle = g\delta(t_2 - t_1)$.



a) Verwenden Sie das Ohm'sche Gesetz und das 2. Kirchhoff'sche Gesetz („Maschenregel") und stellen Sie die Langevin Gleichung für den elektrischen Strom $I(t)$ auf. Vergleichen Sie die auftretenden Größen mit der Brown'schen Bewegung in Beispiel 2.

b) Wie lautet $I(t)$ mit der Anfangsbedingung $I(t = 0) = I_0$?

c) Berechnen Sie den mittleren Strom $\langle I(t) \rangle$ und die Varianz $\sigma_I^2(t)$ für $t > 0$.

d) Bestimmen Sie die Korrelationsfunktion $\langle I(t_2)I(t_1) \rangle$.

Zu kreuzen: 9,10,11,12ab,12c,12d