5. Tutorium UE Statistische Physik II, 06.06.2023

T13 Betrachten Sie einen RL-Kreis (Serienschaltung) bestehend aus einem Widerstand R und einer Induktivität L bei der Temperatur T (siehe 4. Tutorium). Aufgrund der thermischen Bewegung der Elektronen entsteht in dem Schaltkreis ein stochastischer elektrischer Strom („Johnson-Nyquist-Rauschen"). Die resultierende stochastische Spannung schwankt um Null ($\langle U(t)\rangle = 0$) und ist delta-korreliert $\langle U(t_2)U(t_1)\rangle = g\delta(t_2-t_1)$.

a) Stellen Sie ausgehend von der Korrelationsfunktion $\langle I(t_2)I(t_1)\rangle$ (die Sie im 4. Tutorium berechnet haben) einen Zusammenhang zwischen g und R, T, L im Equilibrium (thermischen Gleichgewicht) her. Für die mittlere magnetische Energie in der Spule gilt in dem Fall $\frac{1}{2}L\langle I_0^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$ mit $\langle I_0\rangle = 0$.

b) Verwenden Sie das Wiener-Khinchin Theorem, um die spektrale Dichte $S_U(\omega)$ der zufällig fluktuierenden Spannung $U(t)$ zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat für Schrotrauschen.

T14 Ein Brown'sches Teilchen mit der Masse m bewegt sich in einer Flüssigkeit entlang einer Dimension unter dem Einfluss der Reibungskraft $-\tilde{\gamma}v(t)$ mit $\tilde{\gamma} > 0$ und einer stochastisch fluktuierenden Kraft $f(t)$. Für die stochastische Kraft gelte $\langle f(t_2)f(t_1)\rangle = g\delta(t_2 - t_1)$ und $\langle f(t)\rangle = 0$. Die Geschwindigkeitsverteilung $w(v,t)$ des Teilchens lässt sich durch die Fokker-Planck Gleichung beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}w(v,t) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha_1(v)w(v,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\alpha_2(v)w(v,t)\right)$$

a) Bestimmen Sie aus der Langevin-Gleichung für das Brown'sche Teilchen die Sprungmomente $\alpha_{1,2}(v)$.

b) Für welchen Wert von D_v ist $w_S(v) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D_v}}\exp\left[-\frac{\gamma}{2D_v}v^2\right]$ eine normierte, *stationäre* Lösung der Fokker-Planck Gleichung?

c) Welcher Zusammenhang zwischen den Variablen D_v, γ, T, m muss gelten, damit die Geschwindigkeitsverteilung des Teilchens im thermischen Gleichgewicht durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung gegeben ist?

T15 Die Ortsverteilung $w(x,t)$ eines Brown'schen Flüssigkeitsteilchens mit Masse m im externen Potential $V(x)$ ist für große γ durch die Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V'(x)}{\gamma m}w(x,t)\right) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t)$$

mit $D = \frac{k_BT}{m\gamma}$ (Einstein-Smoluchowski Beziehung) gegeben.

a) Begründen Sie die Herleitung dieser Gleichung im Hinblick auf die Annahme eines großen γ.

b) Betrachten Sie den Fall $V(x) = 0$ und finden Sie die Fundamentallösung der Fokker-Planck Gleichung mit der Anfangsbedingung $w(x, t = 0) = \delta(x - x_0)$.

c) Skizzieren Sie die Lösung für verschiedene Zeiten $t > 0$.

d) Wie lautet die Lösung, wenn zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ die Verteilung $\tilde{w}(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right)$ vorliegt.

e) Wie lauten der Erwartungswert und die Standardabweichung der Ortsverteilung als Funktion der Zeit in diesem Fall?

Zu kreuzen: T13a, T13b, T14ab, T14c, T15a, T15bc, T15de