Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Testmodus : ☐ VU, ☐ VO, ☐ UE
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (VU, 136.099)

1. Test, 17. 11. 2023, 2023/24W

1 (28 Punkte)

Die Vektoren $|\mathbf{f}_1\rangle$ und $|\mathbf{f}_2\rangle$ seien die rechten Eigenvektoren des Operators $\mathbf{A}$ mit den zugehörigen Eigenwerten λ_1 und λ_2. Nehmen Sie an, dass die Eigenvektoren orthonormal zueinander sind (d.h. $\langle \mathbf{f}_i|\mathbf{f}_j\rangle = \delta_{ij}$).

a) $B = \{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle\}$ sei eine Orthonormalbasis des Vektorraums V. Die Eigenvektoren werden in der Basis B als $|\mathbf{f}_i\rangle = s^j{}_i|\mathbf{e}_j\rangle$ dargestellt. Stellen Sie den Operator $\mathbf{A}$ in der Basis B als $\mathbf{A} = a^{ij}|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$ dar und bestimmen Sie die Matrixelemente a^{ij}.

b) Stellen Sie den Operator $\mathbf{A}^n$ (n: Exponent) in der Eigenbasis $\{|\mathbf{f}_1\rangle, |\mathbf{f}_2\rangle\}$ dar.

c) Schreiben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\sin(\mathbf{A})$ an.

d) Die Vektoren $|\mathbf{f}_1\rangle$ und $|\mathbf{f}_2\rangle$ sind auch die Eigenvektoren des Operators $\mathbf{H}$ mit den zugehörigen Eigenwerten α_1 und α_2. Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$.

2 (15 Punkte)

$B = \{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle\}$ sei eine nicht-orthogonale Basis.

a) Zeichnen Sie graphisch die Projektion $|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1|\mathbf{x}\rangle$ eines beliebigen Vektors $|\mathbf{x}\rangle$. (Nehmen Sie an, $\langle\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1\rangle = 1$)

b) Zeichnen Sie graphisch die Projektion $|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}^1|\mathbf{x}\rangle$ eines beliebigen Vektors $|\mathbf{x}\rangle$, wobei $\langle\mathbf{e}^1|$ ein dualer Basisvektor zur Basis B ist.

3 (22 Punkte)

a) Die globale und nicht-lineare Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ und den Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ ist durch $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ gegeben. Die entsprechende lokale und linearisierte Transformation ist durch $dx^i|\mathbf{e}_i\rangle = dx'^i|\mathbf{f}_i\rangle$ definiert. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{f}_i$ in der Basis $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle\}$ des kartesichen Koordinatensystems als $|\mathbf{f}_i\rangle = |\mathbf{e}_j\rangle s^j{}_i$ dar und bestimmen Sie die Koordinaten $s^j{}_i$ des Vektors.

b) Berechnen Sie $\nabla \cdot (r\,|\mathbf{f}_1\rangle)$.

4 Multiple-Choice Gruppe A (VO-Teil) (35 Punkte)

1) Was ergibt der aus Kronecker-Deltas gebildete Ausdruck $\delta_{ij}\delta_{ji}$ in n Dimensionen?
a) 0 b) n c) $2n$ d) 1 e) n^2

2) Die Basisvektoren einer nicht-orthogonalen Basis lassen sich in Bezug auf eine andere Basis als $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ schreiben. Wie lautet der duale Basisvektor $\mathbf{f}^1$?
a) $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$ b) $\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2$ c) $\mathbf{e}^2$ d) $\mathbf{e}^1$ e) $-\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$

3) Welche Eigenschaft gilt im Allgemeinen **nicht** für eine Orthonormalbasis $B = \{\mathbf{e}_i\}$?
a) $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_j|$ für $i \neq j$ b) $|\mathbf{e}_i| = 1$ c) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ für $i \neq j$ d) $\sum_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ e) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

4) Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz gibt es zu jedem Element des Dualraums $x \in V^*$ ein Element $y \in V$ aus dem ursprünglichen Vektorraum V, sodass für alle $z \in V$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gilt
a) $z(y) = \langle y|x\rangle$ b) $z(x) = \langle y|x\rangle$ c) $x(z) = \langle y|z\rangle$ d) $x(y) = \langle x|z\rangle$ e) $y(z) = \langle x|z\rangle$

5) Eine unitäre Transformation U ist definiert durch
a) $U^T = U^{-1}$ b) $UU^{-1} = U^{-1}U$ c) $U \geq 0$ d) $UU^\dagger = \mathbb{1}$ e) $[U, U^T] = 0$

6) Ein Vektor x lässt sich in zwei verschiedenen Basen $B = \{\mathbf{e}_i\}$ und $B' = \{\mathbf{f}_i\}$ darstellen als $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = y^i\mathbf{f}_i$. Wenn die kovarianten Basisvektoren mit $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i{}_j$ transformieren, so transformieren die kontravarianten Komponenten mit
a) $y^j = s^j{}_i x^i$ b) $x^t = s^m{}_m y^t$ c) $x^i = (s^{-1})^i{}_j y^j$ d) $y^m = (s^{-1})^m{}_n x^n$ e) $y^r = x^t s^r{}_t$

7) Der metrische Tensor g_{ij} einer allgemeinen Basis $B = \{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ ist definiert als
a) $|\mathbf{e}_i\rangle|\mathbf{e}_j\rangle$ b) $\frac{|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|}{\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle}$ c) $\langle\mathbf{e}_i|\langle\mathbf{e}_j|$ d) $\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle$ e) $|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$

8) Aufgrund der Anti-Linearität im ersten Argument ist $\langle\alpha x|\beta y\rangle$ äquivalent zu
a) $\alpha\overline{\beta}\langle x|y\rangle$ b) $\langle x|y\rangle\overline{\alpha\beta}$ c) $\beta\langle x|y\rangle\overline{\alpha}$ d) $\alpha\langle x|y\rangle\overline{\beta}$ e) $\alpha\beta\langle x|y\rangle$

9) Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nach der kontravarianten Komponente x^i eines Vektors $x = x^i\mathbf{e}_i$ lässt sich auch schreiben als
a) ∂_i b) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ c) ∂^i d) $\mathbf{e}^i$ e) $\mathbf{e}_i$

10) Für einen idempotenten Projektor $\mathbf{E}_x$ gilt
a) $(\mathbb{1} + \mathbf{E}_x)^2 = 0$ b) $\mathbf{E}_x(\mathbb{1} - \mathbf{E}_x) = 0$ c) $\mathbf{E}_x^2 = 0$ d) $(\mathbb{1} - \mathbf{E}_x)^2 = 0$ e) $\mathbf{E}_x(\mathbb{1} + \mathbf{E}_x) = 0$

11) Nach der Vollständigkeitsrelation für eine nichtorthogonale Basis $B = \{|f_i\rangle\}$ lässt sich der Einheitsoperator $\mathbb{1}$ schreiben als
a) $\sum_i |f_i\rangle\langle f^i|$ b) $\sum_{i\neq j} |f_i\rangle\langle f^j|$ c) $\sum_i \langle f^i|f_i\rangle$ d) $\sum_{i\neq j}\langle f^i|f_j\rangle$ e) $\sum_{i,j}\frac{|f_i\rangle\langle f^i|}{\langle f^j|f_j\rangle}$

12 Der Projektor $E_x = \frac{|x\rangle\langle x|}{\langle x|x\rangle}$ angewendet auf den Vektor $|x\rangle$ ergibt
a) $\langle x|$ b) $\frac{|x\rangle\langle x|}{\langle x|x\rangle}$ c) $|x\rangle$ d) $|x\rangle\langle x|$ e) $\frac{|x\rangle}{\langle x|x\rangle}$

13) Der Ausdruck $\mathbf{e}^m\partial_m\partial_n v^n$ lässt sich schreiben als
a) grad div $\mathbf{v}$ b) div grad v c) Δv d) rot grad v e) rot rot $\mathbf{v}$

14) Die Eigenwerte eines Projektors $\mathbf{E}_x$ können prinzipiell folgende Werte annehmen:
a) $|\lambda_i| = 1$ b) $\lambda_i \in \mathbb{C}$ c) $\lambda_i = 0$ oder 1 d) $\lambda_i > 0$ e) $\lambda_i \in \mathbb{R}$

15) Mit Hilfe der Grassmann-Identität lässt sich der Ausdruck $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\delta_{im}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}$ in der Standardbasis in 3 Dimensionen vereinfachen zu
a) 1 b) 3 c) 0 d) 6 e) 9

16) Eine normale Transformation A (bzw. ein normaler Operator A) ist definiert durch
a) $[A, A^{-1}] = 0$ b) $A^\dagger = A^{-1}$ c) $A^*A = AA^*$ d) $A \geq 0$ e) $[A, A^T] = 0$