Name: Tutoriumsgruppe:
Matr. Nr.: Hörsaal: Sitzplatznummer:
Testmodus : ☐ VU, ☐ VO, ☐ UE
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (VU, 136.099)

2. Test, 19. 1. 2024, 2023/24W

1 (35 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung ($x > 0$)

$$x\frac{d^2}{dx^2}y(x) + (1-x)\frac{d}{dx}y(x) + my(x) = 0\,.$$

a) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ und die Rekursionsgleichung der Folge a_n.
b) Lösen Sie die Differentialgleichung und schreiben Sie eine Lösung $y_1(x)$ für $m = 1$ und eine Lösung $y_2(x)$ für $m = 2$ an.
c) Transformieren Sie die Differentialgleichung in die Sturm-Liouville'sche Gestalt

$$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + mw(x)\right)y(x) = 0\,.$$

d) Berechnen Sie mithilfe der Gamma-Funktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ das Integral

$$\int_0^\infty w(x)y_1(x)y_2(x)dx\,.$$

2 (30 Punkte)

Der Differentialoperator sei definiert, durch

$$\mathcal{L}_t = \left(\frac{d}{dt} - 3 - 2i\right)\left(\frac{d}{dt} - 3 + 2i\right)\,.$$

a) Eine Greensche Funktion $G(t,t') = H(t-t')G_1(t,t') + H(t'-t)G_2(t,t')$ erfüllt die Gleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$. Bestimmen Sie $G_1(t,t')$ und $G_2(t,t')$. Falls Kurvenintegrale verwendet werden, erklären Sie kurz, welcher Integrationspfad verwendet wird und die Begründung für den ausgewählten Pfad (kein detaillierter Beweis ist nötig).
b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f_0 e^{i\Omega t}$.

BITTE WENDEN

3 Multiple-Choice Gruppe A (VO-Teil) (35 Punkte)

1) Unter einer Indexverschiebung ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n-1}$ äquivalent zu
a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-2}$ c) $\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1}$ d) $\sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^{n-2}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1}$

2) $\delta(2x/3) =$
a) $\delta(3x/2)$ b) $2\delta(x)/3$ c) $3\delta(2x)$ d) $\delta(2x)/3$ e) $2\delta(x/3)$

3) Nach der Sokhotski(Sochocki)-Plemelj Formel gilt $\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{x-i\epsilon} =$
a) $\mathcal{P}\frac{1}{x} + i\epsilon\delta(x)$ b) $\mathcal{P}\frac{1}{x} + i\epsilon H(x)$ c) $\mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$ d) $\mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi H(x)$ e) $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

4) Mit $\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$ und $u(x) = \cos(\lambda x)$ wird $\frac{1}{u(x)}(L_x u(x))$ zu
a) $\lambda^2\cos(\lambda x) + \lambda$ b) $-\lambda^2 + i\lambda$ c) $-\lambda^2 - \lambda\tan(\lambda x)$ d) $\lambda^2 - i\lambda\sin(\lambda x)$ e) $\lambda^2 - \lambda$

5) $\delta(x)f(x)$ ist äquivalent zu
a) $\delta(x)f(0)$ b) $\delta(f(0))$ c) $\delta(0)f(0)$ d) $\delta(f(x))$ e) $\delta(0)f(x)$

6) $xH(x) - xH(-x) =$
a) $\mathrm{sgn}(x)$ b) $\delta(x)$ c) $\mathrm{ReLU}(x)$ d) $|x|$ e) $H(x)$

7) $\Gamma(x+1)/\Gamma(x-1) =$
a) $x^2 - x$ b) $2x - 1$ c) $x^2 + 1$ d) $x^2 + x$ e) $x^2 - 1$

8) Die Doppelsumme $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}$ lässt sich mit $l + j = m$ auch schreiben als
a) $\sum_{m=0}^{j}\sum_{j=0}^{\infty}$ b) $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}$ c) $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}$ d) $\sum_{l=0}^{m}\sum_{m=0}^{\infty}$ e) $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}$

9) Die Fourier-Transformierte von e^{-ika} ($a \in \mathbb{R}$) ist gegeben durch $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika}e^{ikx}dk =$
a) $e^{-ixa}/(x-a)$ b) $\theta(x-a)$ c) 1 d) $\delta(x-a)$ e) e^{-ixa}

10) Eine Differentialgleichung mit meromorphen Koeffizienten, bei der alle Singularitäten, einschließlich einer Singularität im Unendlichen, regulär sind, gehört zur Klasse
a) Igel b) Fuchs c) Gans d) Hase e) Rabe

11) $0 = y'(x) + \frac{1}{x}y(x)$ wird mit $x = \frac{1}{t}, u(t) := y(x(t))$ transformiert nach $0 =$
a) $u'(t) - \frac{1}{t}u(t)$ b) $u'(t) + tu(t)$ c) $u'(t) + \frac{1}{t}u(t)$ d) $u'(t) + u(t)$ e) $u'(t) - tu(t)$

12) $\delta(x^2 + 2x) =$
a) $\delta(x) + \delta(2x)$ b) $\delta(x) + \delta(-x)$ c) $\delta(x^2) + 2\delta(x)$ d) $\delta(x) + \delta(x+2)$ e) $\delta(4+2x) + \delta(2x)$

13) Mit dem Pochhammer-Symbol $(z)_n$ gilt für $z, n \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz von $z!\,(z+1)_n =$
a) $n!\,(n+1)_z$ b) $z!\,(n+1)_n$ c) $n!\,(z+1)_z$ d) $z!\,(n+1)_z$ e) $n!\,(z+1)_n$

14) Randbedingungen von $y(x)$ mit $x \in [a,b]$ und $y'(a) = y'(b) = 0$, $y(a) \neq y(b)$ heißen
a) Neumann b) Robin c) Dirichlet d) Schief e) Periodisch

15) Eine Delta-Reihe ist gegeben durch $\delta_n(x) = a_n H(b_n^2 - x^2)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n, b_n) =$
a) $(\frac{n}{2}, n)$ b) $(\frac{2}{n}, n)$ c) $(n, \frac{n}{2})$ d) $(\frac{n}{2}, \frac{1}{n})$ e) $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$

16) Mit Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ wird $(\frac{d^2}{dx\,dy} - 1)u(x,y) = 0$ zu $\alpha =$
a) $\frac{X'}{X} = \frac{Y}{Y'}$ b) $X' = Y'$ c) $X'X = \frac{1}{Y'Y}$ d) $X'X = Y'Y$ e) $\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$