2. Test - Lösungen **19.1.2024**

1 [35 Punkte]

a) Differentialgleichung :
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n m x^{n+\sigma} = 0$
Exponent anpassen : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)^2 x^{n+\sigma-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} m x^{n+\sigma-1} = 0$
$\to a_0\sigma^2 x^{\sigma-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(n+\sigma)^2 - a_{n-1}(n+\sigma-1-m)\right) x^{n+\sigma-1} = 0$
Koeffizientenvergleich
$x^{\sigma-1}$ Term : Da $a_0 \neq 0$, $\sigma = 0$
$x^{n+\sigma-1}$ Term $(n \geq 1)$: $a_n = a_{n-1}\frac{n-m-1}{n^2}$
b) Wenn $m=1$, gilt $a_n = a_{n-1}\frac{n-2}{n^2}$. $a_1 = -a_0$, $a_2 = 0$, $a_3 = a_2/9 = 0$, $\cdots$, $a_n = 0$ $(n \geq 2)$
Wenn $m=2$, gilt $a_n = a_{n-1}\frac{n-3}{n^2}$. $a_1 = -2a_0$, $a_2 = -a_1/4 = a_0/2$, $a_3 = 0$, $\cdots$, $a_n = 0$ $(n \geq 3)$
$y_1(x) = c_1(1-x)$, $y_2(x) = c_2(1-2x+x^2/2)$
c) $p'(x)/p(x) = (1-x)/x \to p(x) = xe^{-x}$, $w(x) = p(x)/x = e^{-x}$
d) $\int_0^{\infty} w(x)y_1(x)y_2(x)dx = c_1c_2\int_0^{\infty} e^{-x}(1-3x+(5/2)x^2-x^3/2)dx = c_1c_2(\Gamma(1) - 3\Gamma(2) + (5/2)\Gamma(3) - (1/2)\Gamma(4)) = 0$

2 [30 Punkte]

a) $\mathcal{L}_t e^{i\omega t} = (i\omega-3-2i)(i\omega-3+2i)e^{i\omega t} = -(\omega+i3-2)(\omega+i3+2)e^{i\omega t}$
$G(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-(2-3i))(\omega-(-2-3i))} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-(2+3i)} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-(-2-3i)}$
offene oberer und unterer Halbkreise : $C_o = \{z = Re^{i\theta}|0<\theta<\pi\}$, $C_u = \{z = Re^{i\theta}|\pi<\theta<2\pi\}$
geschlossene Halbkreise : $C_o' = C_o + \{z|-R<z<R\}$ und $C_u' = C_u + \{z|-R<z<R\}$
Im Limes $R\to\infty$, $\int_{C_o} d\omega\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} \to 0$ wenn $t > t'$ und $\int_{C_u} d\omega\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} \to 0$ wenn $t < t'$.
Folglich,
$G(t,t') = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}H(t-t')\oint_{C_o'} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-(2-3i)} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}H(t'-t)\oint_{C_u'} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-(2-3i)}\right]$
$+\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}H(t-t')\oint_{C_o'} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-(-2-3i)} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}H(t'-t)\oint_{C_u'} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-(-2-3i)}\right]$
$= \frac{i}{4}H(t'-t)e^{(2i+3)(t-t')} - \frac{i}{4}H(t'-t)e^{(-2i+3)(t-t')} = -\frac{1}{2}H(t'-t)e^{3(t-t')}\sin(2(t-t'))$
$G_1(t,t') = 0$ und $G_2(t,t') = \frac{i}{4}(e^{(2i+3)(t-t')} - e^{(-2i+3)(t-t')})$
mit den homogenen Lösungen sind $G_1(t,t') = a_1e^{(2i+3)(t-t')} + a_2e^{(-2i+3)(t-t')})$
und $G_2(t,t') = (a_1+i/4)e^{(2i+3)(t-t')} + (a_2-i/4)e^{(-2i+3)(t-t')}$ für beliebige a_1 und a_2 auch ok.
Alternative : $\mathcal{L}_t e^{i\omega t} = -(\omega+i3-2)(\omega+i3+2)e^{i\omega t}$
$\to$ Lösungen der homogenen Gleichung : $x_1(t) = e^{(2i+3)t}$ und $x_2(t) = e^{(-2i+3)t}$
Wegen der Translationsinvarianz, hängt $G(t,t')$ nur von $t-t'$,
d.h. $G(t,t') = H(t-t')(a_1x_1(t-t') + a_2x_2(t-t')) + H(t'-t)(b_1x_1(t-t') + b_2x_2(t-t'))$
Stetigkeit : $\lim_{t'\to t^+} G(t-t') = \lim_{t'\to t^-} G(t-t') \to b_1 + b_2 = a_1 + a_2$
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\delta(t-t')dt = 1$
$\to \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{d}{dt}G(t,t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = a_1(2i+3) + a_2(-2i+3) - b_1(2i+3) - b_2(-2i+3) = 1$
$\to b_1 = a_1 + i/4$ und $b_2 = a_2 - i/4$
$G(t-t') = a_1x_1(t-t') + a_2x_2(t-t') + (i/4)H(t'-t)(x_1(t-t') - x_2(t-t'))$
b) $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t')f_0e^{i\Omega t'} = -\frac{1}{2\pi}f_0\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-(2-3i))(\omega-(-2-3i))}e^{i\Omega t'}$
$= -\frac{1}{2\pi}f_0\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-(2-3i))(\omega-(-2-3i))}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(\Omega-\omega)t'}dt' = -f_0\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega t}}{(\omega-(2-3i))(\omega-(-2-3i))}\delta(\Omega-\omega)$
$= -f_0\frac{e^{i\Omega t}}{(\Omega-(2-3i))(\Omega-(-2-3i))}$
oder $\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t')f_0e^{i\Omega t'} = \frac{i}{4}f_0e^{(2i+3)t}\,\frac{e^{(i\Omega-2i-3)t'}}{i\Omega-2i-3}\Big|_t^{t'=\infty} - \frac{i}{4}f_0e^{(-2i+3)t}\,\frac{e^{(i\Omega+2i-3)t'}}{i\Omega+2i-3}\Big|_t^{t'=\infty} = -\frac{i}{4}f_0\frac{e^{i\Omega t}}{i\Omega-2i-3} + \frac{i}{4}f_0\frac{e^{i\Omega t}}{i\Omega+2i-3}$
Da die Lösungen der homogenen Gleichung $x_1(t) = e^{(2i+3)t}$ und $x_2(t) = e^{(-2i+3)t}$ sind, ist die allgemeine Lösung $x(t) = x_I(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$.

3 Multiple-Choice Gruppe A (VO-Teil) [35 Punkte]

Lösungen Gruppe A:
1b ($n \to n-1$),
2c ($\delta(ax) = \delta(x)/|a|$),
3c,
4c ($\mathcal{L}_x u(x) = -\lambda^2 \cos(\lambda x) + \lambda \sin(\lambda x)$),
5a,
6d (x für $x > 0$, $-x$ für $x < 0$),
7a ($\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1)$),
8e ($j = m - l \geq 0$ bzw. $l = m - j \geq 0$ soll gelten),
9d ($\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$),
10b,
11a ($y'(x) = \frac{dy(x(t))}{dt} \frac{dt}{dx} = -t^2 u'(t)$),
12e ($\delta(x(x+2)) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x+2)$),
13a ($z!(z+1)_n = (z+n)! = (n+z)!$),
14a,
15d ($H(b_n^2 - x^2) \leftrightarrow |x| < b_n$),
16a ($X'(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$)