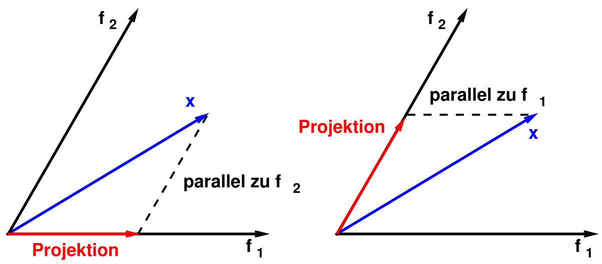
**Nachtest - Lösungen** **8.3.2023**

## 1 [ 30 Punkte ]

a) Projektion parallel zu $\mathbf{f}_1$ und zu $\mathbf{f}_2$




b) $\det A - \eta I = (3-\eta)^2 - 1 = 0 \to \eta = 2, 4$
Eigenwerte der Matrix $\log(A)$ : $\lambda = \log(\eta) = \log 2, \log 4$.
c) $r\mathbf{f}_1 = r\left(\mathbf{e}_i \partial_1' x^i\right) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x^i \mathbf{e}_i$
$\nabla \cdot (r\mathbf{f}_1) = \mathbf{e}^j \partial_j x^i \mathbf{e}_i = \delta^i{}_i = 3.$

## 2 [ 15 Punkte ]

$\mathcal{L}_t e^{i\omega t} = -(\omega - i - 1)(\omega - i + 1)e^{i\omega t} \equiv \lambda(\omega) e^{i\omega t}$
Lösung der inhomogenen Gleichung :
$x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') f_0 e^{i\Omega t'} = \frac{1}{2\pi} f_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\lambda(\omega)} e^{i\Omega t'} = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta(\omega - \Omega) \frac{e^{i\omega t}}{\lambda(\omega)} = -f_0 \frac{e^{i\Omega t}}{(\Omega - i - 1)(\Omega - i + 1)}$
allgemeine Lösung : $x(t) = x_I(t) + c_1 e^{i(i+1)t} + c_2 e^{i(i-1)t}$

## 3 [ 20 Punkte ]

a) Differentialgleichung :
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2m x^{n+\sigma} = 0$
Exponent anpassen : $\sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)x^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2(n+\sigma-m)x^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich
$x^{\sigma-2}$ Term : $a_0\sigma(\sigma-1) = 0$. Da $a_0 \neq 0$, $\sigma_1 = 1$ und $\sigma_2 = 0$
$x^{\sigma-1}$ Term : $a_1\sigma(\sigma+1) = 0$. Doe Gleichung gilt für $\sigma = 0$. Wenn $\sigma = 1$, muss $a_1 = 0$.
$x^{n+\sigma}$ Term $(n \geq 0)$ : $a_{n+2} = a_n \frac{2(n+\sigma-m)}{(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)}$
b) Wenn $\sigma = 1$ und $m = 1$, gilt $a_{n+2} = a_n \frac{2n}{(n+3)(n+2)}$.
Da $a_1 = 0$, gilt $a_n = 0$ für ungerade $n$. $a_2 = 0a_0 = 0 \to a_n = 0$ für gerade $n$ ausser $n = 0$
$y_1(x) = a_0 x$
Wenn $\sigma = 1$ und $m = 3$, gilt $a_{n+2} = a_n \frac{2(n-2)}{(n+3)(n+2)}$.
Da $a_1 = 0$, gilt $a_n = 0$ für ungerade $n$. $a_2 = -\frac{2}{3}a_0$, $a_4 = 0 \to a_n = 0$ für gerade $n$ ausser $n = 0, 2$
$y_3(x) = a_0\left(x - \frac{2}{3}x^3\right)$

## 4 [ 35 Punkte ]

Lösungen Gruppe A:
1b, 2d, 3d, 4d, 5e, 6b, 7b, 8c, 9d, 10e, 11e, 12d, 13e, 14c, 15c, 16a