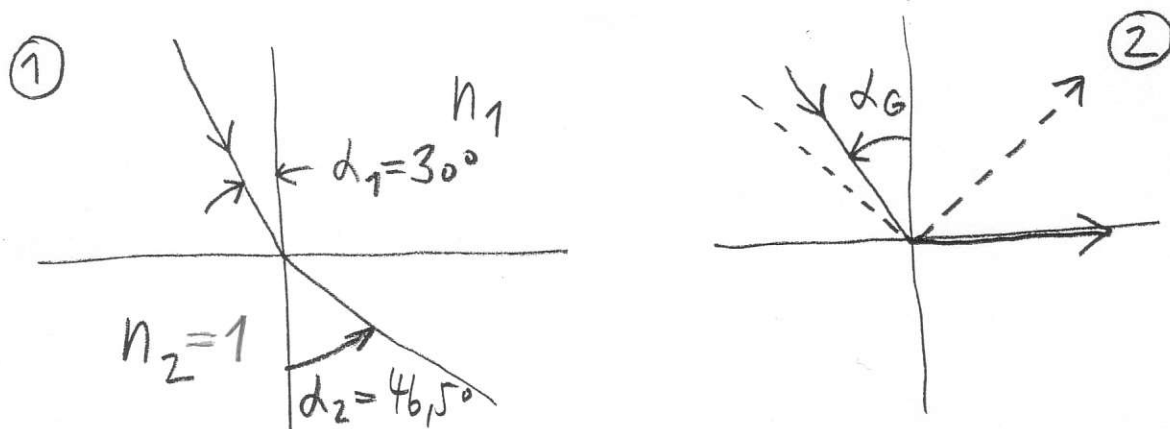


Grundlagen der Physik SS13  
(VU 138.038)

Rechenbeispiele zu den  
Kap.5 (Optik) und Kap.6 (Moderne Physik)

1. Ein Lichtstrahl wird an der Grenzfläche von Quarzglas (Brechungsindex  $n_1$ ) und Luft (Brechungsindex  $n_2 = 1$ ) gebrochen (Skizze 1).



Welcher Brechungsindex  $n_1$  folgt daraus für Quarzglas?  
 Welchen Wert hat damit die Lichtgeschwindigkeit  $c_1$  in Quarzglas?  
 Wie groß ist der Grenzwinkel der Totalreflexion  $\alpha_G$  (Skizze 2)?

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = 1 \cdot \sin \alpha_2$$

$$n_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin 46,5^\circ}{\sin 30^\circ} = \underline{\underline{1,45}}$$

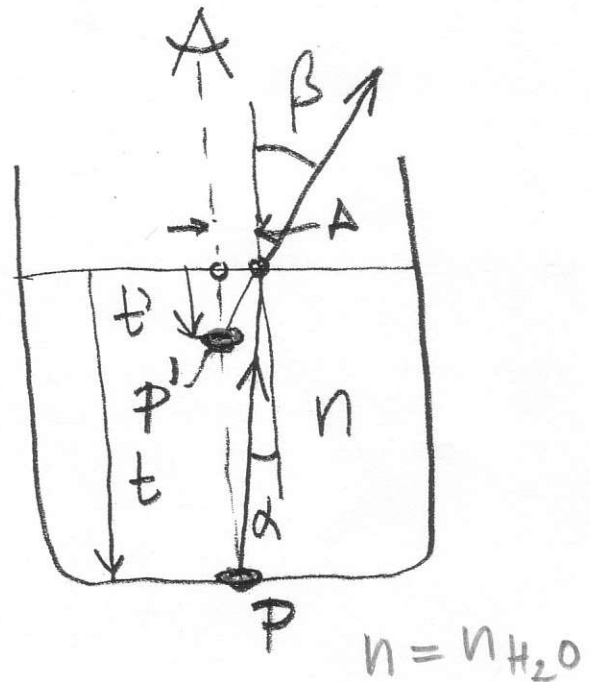
$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{c_0}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,45} = \underline{\underline{2,07 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}}$$

$$n_1 \sin \alpha_G = n_2 \cdot \sin 90 = 1 \cdot 1$$

$$\sin \alpha_G = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{1,45} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_G = 43,6^\circ}}$$

2. Ein Gegenstand liegt auf dem Boden eines Glases in einer Wassertiefe von  $t = 15\text{cm}$  (Brechungsindex von Wasser  $n_{\text{H}_2\text{O}} = 1.33$ ).

In welcher *scheinbaren* Tiefe  $t'$  erscheint der Gegenstand einem Beobachter, wenn dieser senkrecht von oben in das Glas blickt?



$$n \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta}{t}$$

$$\tan \beta = \frac{\Delta}{t'}$$

$\alpha, \beta \dots$  kleine Winkel

$$\Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha$$

$$\sin \beta \approx \tan \beta$$

$$n \cdot \sin \alpha \approx n \cdot \tan \alpha = n \cdot \frac{\Delta}{t}$$

$$\sin \beta \approx \tan \beta = \frac{\Delta}{t'}$$

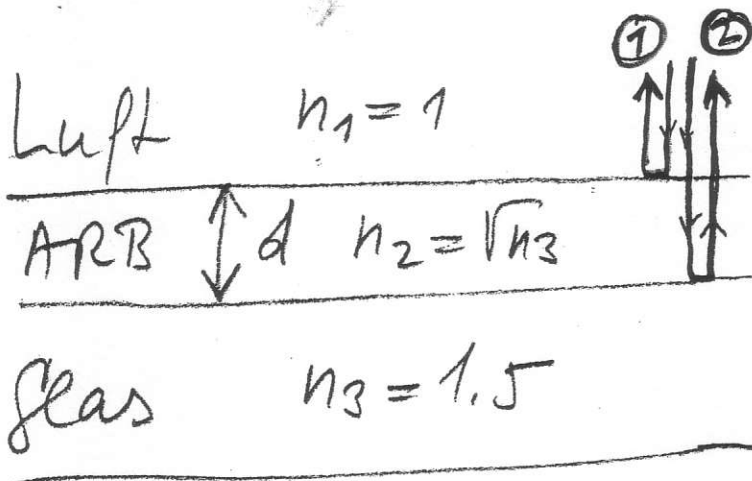
$n \cdot \frac{\Delta}{t} = \frac{\Delta}{t'} \Rightarrow$  alle von P ausgehenden Strahlen gehen nach der Brechung scheinbar von P' aus!

$$t' = \frac{t}{n}$$

$$t' = \frac{15}{1.33} \approx 0,75 \cdot 15 = \underline{\underline{11,3\text{cm}}}$$

3. Man bestimme die Dicke  $d$  eines Antireflexbelages (ARB) für eine Glasoberfläche (Skizze) für Licht mit der Wellenlänge  $\lambda = 500\text{nm}$ .



(optimales  $n_2$ , ohne Beweis)

$$n_2 = \sqrt{1.5} = 1.22$$

$$d = ?$$

$D_{12} = 2dn_2$  (an beiden Grenzflächen Reflexion am dichteren Medium  $\Rightarrow$  keine weitere Phasenstift von  $\lambda/2$ !!) \*)

$$2dn_2 = \frac{\lambda}{2}, \left(\frac{3\lambda}{2}, \dots\right)$$

$$d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \sqrt{1.5}} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 102 \cdot 10^{-9} \text{ m} = \underline{\underline{102 \text{ nm}}}$$

$$\lambda = \lambda_{\text{grün}} \approx 500 \text{ nm} = 500 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

[ aus Skriptum:

Min. der Reflexion für

$$D_{12} = 2d \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = \frac{(2k+1)\lambda}{2} \quad h=0$$

$$\alpha = 0$$

$$D_{12} = 2d \sqrt{n_2^2 - 0} = 2dn_2 = \frac{\lambda}{2} \text{ s.o. !} ]$$

#### 4. Diskussion eines Matlab-Demoprogrammes zur Anwendung des Huygens-Fresnelschen Prinzips auf die Beugung am Spalt:

```
#####
% MATLAB m-file diffraction_slit.m :
% simulation of slit diffraction pattern as a function of lambda and slit_width
% based on Huygens-Fresnel Principle (HFP)
% metric units are in mm
#####

clear all; % clear all variables

pi2=2*pi; pi180=pi/180;

lambda=input('lambda [mym]: '); lambda=lambda*1e-3; k=pi2/lambda;
b=input('slit_width [mym]: '); b=b*1e-3; b2=b/2;
dist_sp=1000; % distance between slit and projection screen
dist_sp2=dist_sp*dist_sp;
alpha_max=input('alpha_max [deg]: '); alpha_max=alpha_max*pi180;

y_max=dist_sp*tan(alpha_max);
np=2000; % no of points on projection screen, where intensity is calculated
y=linspace(-y_max,y_max,np); alpha=atan(y/dist_sp);

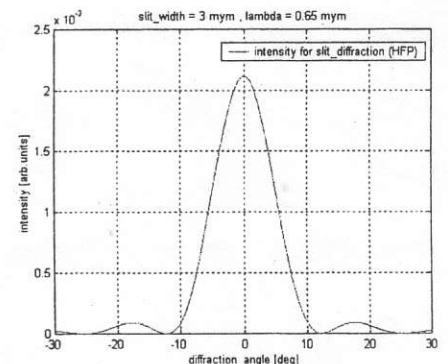
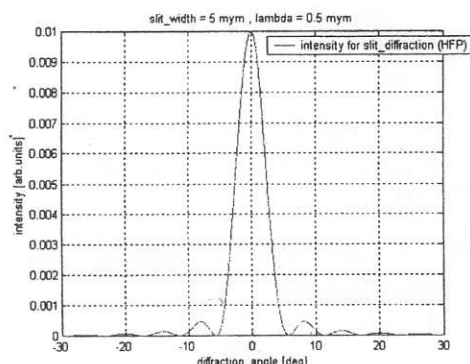
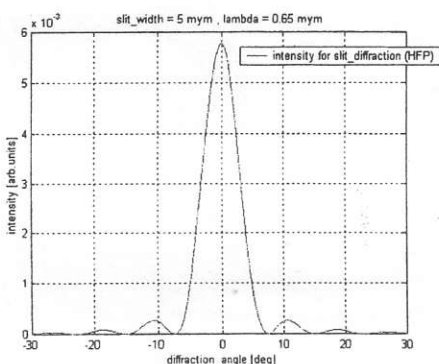
nl=10; % no of HF elementary waves per unit of lambda
ns=nl*b/lambda; % no of HF elementary waves starting from slit
db=b/(ns-1);

ampl=zeros(1,np)+j*zeros(1,np);

for ip=1:np
    for n=1:ns
        y0=-b2+(n-1)*db; dist_y=y(ip)-y0;
        dist=sqrt(dist_sp2+dist_y*dist_y);
        phase=k*dist;
        % adding amplitudes of HF elementary waves for a point on projection screen
        ampl(ip)=ampl(ip)+1/dist*exp(j*phase);
        % ++++++
    end
    inty(ip)=ampl(ip)*conj(ampl(ip)); % calculate intensity from amplitude
end

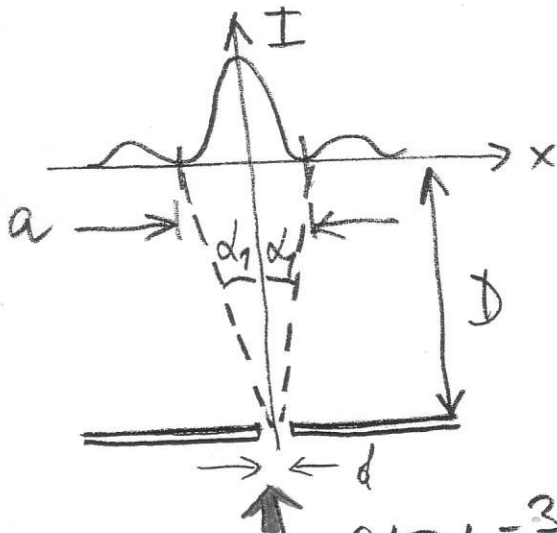
figure; % open new plotting window

plot(alpha/pi180,inty,'r','linewidth',1); grid on;
title_text=['slit\_width = ' num2str(b*1e3) ' mym , ' ...
            'lambda = ' num2str(lambda*1e3) ' mym'];
title(title_text);
legend('intensity for slit\_diffraction (HFP)');
xlabel('diffraction\_angle [deg]'); ylabel('intensity [arb.units]');
```



5. Bei der Beugung einer ebenen Welle roten Laserlichts (Wellenlänge  $\lambda = 650\text{nm}$ ) an einem Spalt wird in einer Entfernung von  $D = 2\text{m}$  nach dem Spalt der Abstand der beiden Minima 1. Ordnung mit  $a = 215\text{mm}$  bestimmt (Skizze).

Welche Breite  $d$  hat der Spalt ?



$$\tan \alpha_1 = \frac{a}{2D} = \frac{215 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2} = 5,37 \cdot 10^{-2}$$

$$\alpha_1 \approx 3,1^\circ \Rightarrow \sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 \approx \alpha$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d} \approx \tan \alpha_1$$

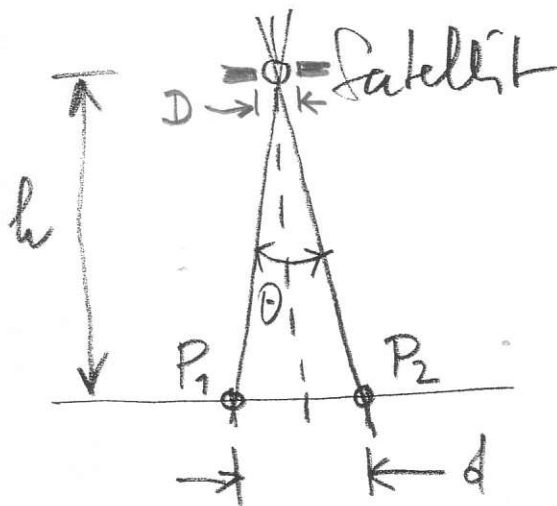
$$d = \frac{\lambda}{\tan \alpha_1} = \frac{\lambda \cdot 2D}{a} = \frac{650 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 2}{215 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \underline{\underline{12,1 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 12,1 \mu\text{m}}}$$

6. Mit der Kameraoptik eines Erderkundungssatelliten sollen aus einer Flughöhe von  $h = 500\text{km}$  zwei (leuchtende) Punkte im Abstand von  $d = 1\text{m}$  bei Annahme grünen Lichts (Wellenlänge  $\lambda = 550\text{nm}$ ) noch unterschieden werden können.

Wie groß muss dazu nach dem Rayleigh-Kriterium der Durchmesser  $D$  der Apertur (Linse) mindestens sein?

[Man nehme dazu näherungsweise an, dass die Gleichung für die Beugungsminima an einer kreisförmigen Apertur gleich jener für die Beugung an einem Spalt ist.]



$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D_{(\text{min})}}$$

(Rayleigh-Kriterium)

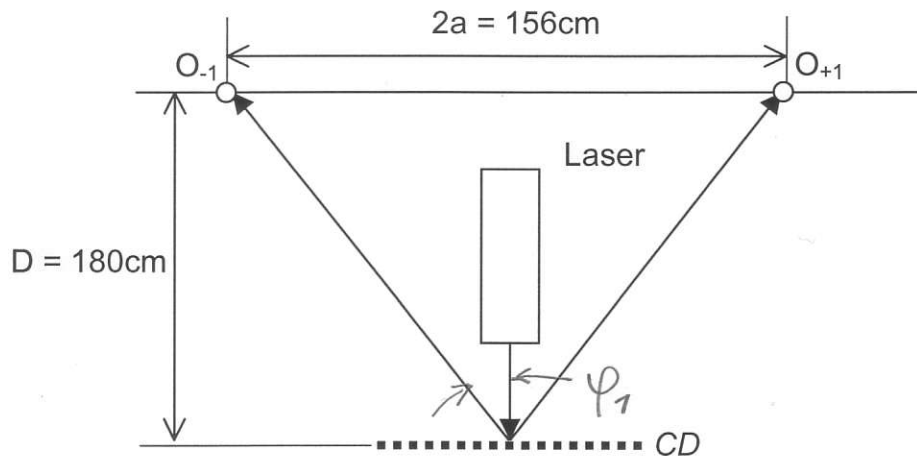
$$\tan \theta \approx \theta = 2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right) \frac{1}{h} = \frac{d}{h} = \frac{1}{500 \cdot 10^3} = \frac{1}{5 \cdot 10^5}$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$D_{(\text{min})} = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,275 \mu\text{m} = \underline{\underline{27,5 \text{ cm}}}$$

7. Ein Laserstrahl (Wellenlänge  $\lambda = 633\text{nm}$ ) wird an einer CD (=Reflexionsgitter) gebeugt (Skizze) und der Abstand der Beugungsmaxima 1. Ordnung ( $O_{-1}$ ,  $O_{+1}$ ) vermessen (Skizze).

Wie groß ist der sich daraus ergebende *Spurabstand*  $s$  ?



$$\tan \varphi_1 = \frac{a}{D} = \frac{1,56}{2 \cdot 1,80}$$

$$\varphi_1 = 23,43^\circ \quad (\text{keine Naherung fur kleine Winkel!})$$

$$\lambda = s \cdot \sin \varphi_1$$

$$s = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1} = \frac{633 \cdot 10^{-9}}{\sin 23,43^\circ} = 1,59 \cdot 10^{-6} \text{ m} \approx \underline{\underline{1,6 \mu\text{m}}}$$



8. Ein Gegenstand der Größe  $G = 25\text{mm}$  soll von einer Sammellinse auf einem Projektionsschirm in einer Entfernung von  $b = 8\text{m}$  mit einer Größe von  $B = 2\text{m}$  abgebildet werden (einfacher LCD-Projektor).

Wie groß sind die dafür erforderliche *Brennweite*  $f$  und die *Gegenstandsweite*  $g$ ?

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} ; \quad V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{2}{0,025} = 80 ;$$

$$g = \frac{b}{V} = \frac{8}{80} = 0,1\text{m} = \underline{\underline{10\text{cm}}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{b}{V}\right)} + \frac{1}{b} = \frac{V}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1+V}{b} = \frac{1}{f} ; \quad f = \frac{b}{1+V}$$

$$f = \frac{8}{81} = 0,0987\text{m} = \underline{\underline{9,87\text{cm}}}$$

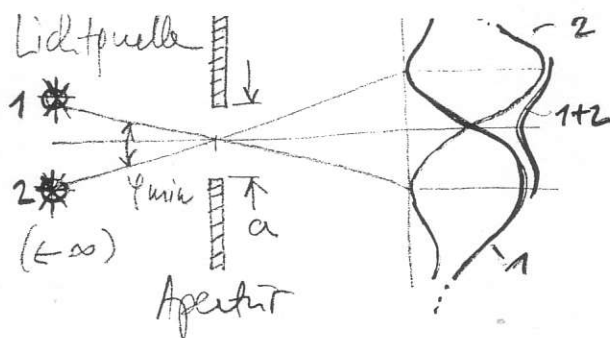
$$(g = f + d, \quad d \ll f)$$

9. Auflösungsgrenze des Auges nach dem Rayleigh-Kriterium für eine Wellenlänge  $\lambda = 550\text{nm}$  (~ mittlere Wellenlänge des sichtbaren Bereiches) und eine Apertur-Durchmesser = Pupillen-Durchmesser von  $a = 2\text{mm}$ :

Wie groß ist die kleinste noch unterscheidbare Winkeldifferenz  $\varphi_{\min}$  zweier auf das Auge auftreffender ebener Wellen (zB von zwei sehr weit entfernten Punkt-Lichtquellen) ?

Welcher kleinster Abstand  $D$  ergibt sich daraus für deren Bildpunkte (=Brennpunkte) auf der Netzhaut (Brennweite der Augenlinse  $f = 25\text{mm}$ ) ?

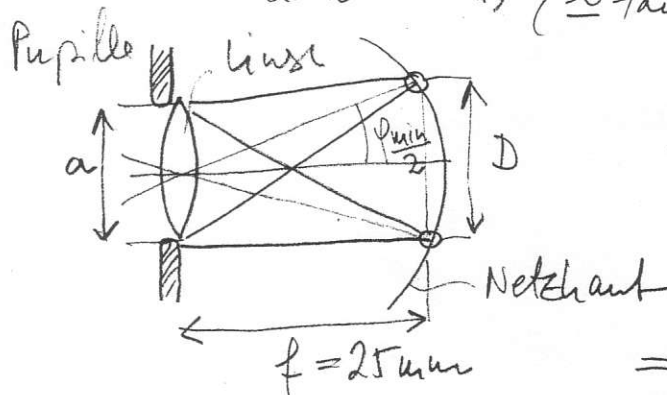
[Man nehme dazu näherungsweise an, dass die Gleichung für die Beugungsminima an einer kreisförmigen Apertur gleich jener für die Beugung an einem Spalt ist.]



Spalt:  
 $\sin \varphi_{\min} = \frac{\lambda}{a}$  (Rayleigh-Krit.)  
 [Loch:  $\sin \varphi_{\min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{a}$ ]

Auge (Linse + Pupille):  $a = 2\text{mm} = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$   
 $\lambda = \lambda_{\text{grün}} \approx 550\text{nm}$

$\sin \varphi_{\min} = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,75 \cdot 10^{-4} \approx \varphi_{\min}$   
 \*) ( $\approx \tan \varphi_{\min}$ )



$D = 2f \tan \frac{\varphi_{\min}}{2}$   
 $\approx \varphi_{\min} \cdot f =$

$= 2,75 \cdot 10^{-4} \cdot 25 \cdot 10^{-3} =$   
 $= 6,875 \cdot 10^{-6}\text{m} =$

$D \approx 6,8 \mu\text{m}$

(entspricht ~ dem doppelten (!) Zapfchenabstand)

[Anmerkung: in der deutlichen Schwere von 25cm können 2 Punkte im Abstand von 0,1mm wohl getrennt wahrgenommen werden:  
 $\Rightarrow \varphi_{\min} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-4}$  rad

10. Photoelektrischer Effekt:

Eine Zinkplatte wird elektrisch aufgeladen; Zn besitzt eine Austrittsarbeit von  $W_A = 4,34 \text{ eV}$ .

Wie groß ist die Grenzwellenlänge  $\lambda_G$  des Lichts, mit dem die Zn-Platte noch entladen werden kann?

$$h \cdot f_G = h \cdot \frac{c_0}{\lambda_G} = \underbrace{E_{\text{kin}}}_{=0} + W_A$$

$$\lambda_G = \frac{hc_0}{W_A} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\underbrace{(4,34 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19})}_{*})} =$$

$$= 2,857 \cdot 10^{-7} \text{ m} =$$

$$= 285,7 \text{ nm} \\ (\text{UV-Bereich})$$

Quecksilberdampf Lampe:  $\lambda_{\text{Hg}} = 253 \text{ nm}$

$$\lambda_{\text{Hg}} < \lambda_G (\checkmark)$$

$$(*) 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$