Einige zusätzliche Beispiele aus dem Bereich der Mechanik (mit Lösungsweg)

Ein Stab, der parallel zur x-Achse eines Bezugssystems S liegt, bewegt sich entlang dieser Achse mit einer Geschwindigkeit von 0,630c. Die Ruhelange des Stabs beträgt 1,70 m. Wie lang ist der Stab gemessen von S aus?

Die Länge L des Stabes, wie sie von einem Bezugssystem gemessen wird, das sich mit der Geschwindigkeit v parallel zu seiner Länge bewegt, steht zu seiner Ruhelänge L_0 über $L = L_0/\gamma$ in Beziehung, wobei, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$ gilt. Da γ größer als 1 sein muss, ist L kürzer als L_0. Für diese Aufgabe ist $L_0 = 1{,}70\,\mathrm{m}$ und $\beta = 0{,}630$, also $L = (1{,}70\,\mathrm{m})\sqrt{1-(0{,}630)^2} = 1{,}32\,\mathrm{m}$.

Ein Raumschiff mit einer Ruhelange von 130 m fliegt mit einer Geschwindigkeit von 0,740c an einer Zeitmessstation vorbei. (a) Welche Länge des Raumschiffs wird von der Station aus gemessen? (b)Welche Zeit vergeht auf den Uhren der Station zwischen dem Vorbeiflug des Bugs und des Hecks?

(a) Die Ruhelänge $L_0 = 130\,\mathrm{m}$ des Raumschiffs und seine Länge L, wie sie von der Zeitmessstation gemessen wird, stehen über $L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-\beta^2}$ in Beziehung, wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$ sind. Also gilt $L = (130\,\mathrm{m})\sqrt{1-(0{,}740)^2} = 87{,}4\,\mathrm{m}$.

(b) Das Zeitintervall für den Vorbeiflug des Raumschiffs ist

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{87{,}4\,\mathrm{m}}{(0{,}740)(3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s})} = 3{,}94 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}\,.$$

Ein Oszillator bestehe aus einem mit einer Feder verbundenen Gewicht der Masse 0,500 kg. Wenn dieses System mit einer Amplitude von 35,0 cm schwingt, wiederholt sich die Bewegung alle 0,500 s. Berechnen Sie (a) die Periode, (b) die Frequenz, (c) die Kreisfrequenz, (d) die Federkonstante, (e) die maximale Geschwindigkeit und (f) den Betrag der maximalen Kraft, die das Gewicht auf die Feder ausübt.

(a) Die Bewegung wiederholt sich alle $0{,}500\,\mathrm{s}$, also muss die Periode $T = 0{,}500\,\mathrm{s}$ sein.

(b) Die Frequenz ist der Kehrwert der Periode: $f = 1/T = 1/(0{,}500\,\mathrm{s}) = 2{,}00\,\mathrm{Hz}$.

(c) Die Kreisfrequenz ω ist $\omega = 2\pi f = 2\pi(2{,}00\,\mathrm{Hz}) = 12{,}57\,\mathrm{rad/s}$.

(d) Die Kreisfrequenz steht mit der Federkonstanten k und der Masse m über $\omega = \sqrt{k/m}$ in Beziehung, also haben wir $k = m\omega^2 = (0{,}500\,\mathrm{kg})(12{,}57\,\mathrm{rad/s})^2 = 79{,}0\,\mathrm{N/m}$.

(e) Wenn x_m die Amplitude bezeichnet, ergibt sich für die maximale Geschwindigkeit $v_m = \omega x_m = (12{,}57\,\mathrm{rad/s})(0{,}350\,\mathrm{m}) = 4{,}40\,\mathrm{m/s}$.

(f) Die maximale Kraft wird ausgeübt, wenn die Auslenkung maximal ist, und ihr Betrag ist gegeben durch $F_m = kx_m = (79{,}0\,\mathrm{N/m})(0{,}350\,\mathrm{m}) = 27{,}6\,\mathrm{N}$.

Bei einem Elektrorasierer schwinge die Klinge uber einen Abstand von 2 ¨ ,0 mm mit einer Frequenz von 120 Hz hin und her (als harmonische Schwingung angenommen). Bestimmen Sie (a) die Amplitude, (b) die maximale Klingengeschwindigkeit und (c) den Betrag der maximalen Klingenbeschleunigung.

(a) Die Amplitude ist die Hälfte des Verschiebungsabstands, also ist $x_m = 1{,}0\,\mathrm{mm}$.

(b) Die maximale Geschwindigkeit v_m steht mit der Amplitude x_m über $v_m = \omega x_m$ in Beziehung, wobei ω die Kreisfrequenz bezeichnet. Wegen $\omega = 2\pi f$ mit der Frequenz f ergibt sich

$$v_m = 2\pi f x_m = 2\pi(120\,\mathrm{Hz})\left(1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right) = 0{,}75\,\mathrm{m/s}\,.$$

(c) Die maximale Beschleunigung ist

$$a_m = \omega^2 x_m = (2\pi f)^2 x_m = (2\pi(120\,\mathrm{Hz}))^2\left(1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right) = 570\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

(a) Eine Salami der Masse 11,0 kg hangt an ei- ¨ ner Schnur, die an einer Federwaage befestigt ist. Diese wiederum hangt an einer zweiten Schnur von der Decke herab ¨ (Abb. 5-33a). Welchen Wert zeigt die Federwaage an, deren Skala in Gewichtseinheiten markiert ist? (b) In Abb. 5-33b lauft die Schnur zwischen Salami und Federwaage über eine Rolle. Das andere Ende der Federwaage ist mit einer zweiten Schnur an einer Wand befestigt. Welchen Wert zeigt die Federwaage an? (c) In Abb. 5-33c wurde die Wand durch eine zweite Salami der gleichen Masse ersetzt, die auf der linken Seite hängt. Der gesamte Aufbau befindet sich in Ruhe. Welchen Wert zeigt die Federwaage nun an?

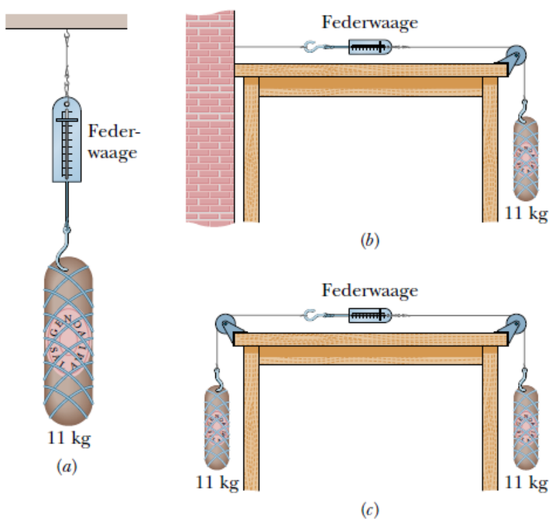


Abb. 5-33: Aufgabe 9

In allen drei Fällen wird die Federwaage nicht beschleunigt, d.h. dass die beiden Schnüre Kräfte mit dem gleichen Betrag auf sie ausüben. Die Waage zeigt den Betrag jeder dieser Kräfte an. In jedem Fall muss die Zugkraft der an der Salami befestigten Schnur den gleichen Betrag haben wie das Gewicht der Salami, weil die Salami nicht beschleunigt wird. Also zeigt die Waage mg an, wobei m die Masse der Salami ist. Ihr Wert ist $(11{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}) = 108\,\mathrm{N}$.

Ein Raketenschlitten kann in 1,8 s mit einer konstanten Rate von null auf 1600 km/h beschleunigt werden. Wie groß ist der Betrag der dafur benötigten Gesamtkraft, wenn der Schlitten eine Masse von 500 kg besitzt?

In Beträgen geschrieben lautet das zweite Newtonsche Axiom $F = ma$, wobei F für $|\vec{F}_{\mathrm{net}}|$, a für $|\vec{a}|$ steht (was nicht immer so ist; beachten Sie die Verwendung von a in der letzten Lösung) und m die (immer positive) Masse ist. Den Betrag der Beschleunigung kann man bestimmen, indem man die Kinematik für konstante Beschleunigung (Tabelle 2-1) verwendet. Lösen wir $v = v_0 + at$ für den Fall, wo der Raketenschlitten aus der Ruhe startet, erhalten wir $a = v/t$ (was wir in Einheiten des Betrages interpretieren, sodass die Angabe einer Koordinatenrichtung unnötig wird). Die Geschwindigkeit ist $v = (1600\,\mathrm{km/h})(1000\,\mathrm{m/km})/(3600\,\mathrm{s/h}) = 444\,\mathrm{m/s}$, also haben wir

$$F = (500\,\mathrm{kg})\frac{444\,\mathrm{m/s}}{1{,}8\,\mathrm{s}} = 1{,}2 \times 10^5\,\mathrm{N}\,.$$

Ein Arbeiter zieht eine Kiste mit einer Masse von 50 kg über einen reibungsfreien horizontalen Fußboden, indem er eine Kraft von 210 N anwendet, die einen Winkel von 20◦ oberhalb der Horizontalen besitzt. Er bewegt die Kiste 3 m weit. Welche Arbeit wird dabei an der Kiste (a) durch die Kraft des Arbeiters, (b) durch die auf die Kiste wirkende Gravitationskraft bzw. (c) durch die vom Fußboden auf die Kiste ausgeubte Normalkraft verrichtet? (d) Wie groß ist die ¨ an der Kiste verrichtete Gesamtarbeit?

(a) Die Kraft des Arbeiters auf die Kiste ist konstant, also ist die an ihr verrichtete Arbeit gegeben durch $W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\phi$, wobei $\vec{F}$ die Kraft, $\vec{d}$ die Verschiebung der Kiste und ϕ den Winkel zwischen der Kraft und der Verschiebung bezeichnet. Hier ist $F = 210\,\mathrm{N}$, $d = 3{,}0\,\mathrm{m}$ und $\phi = 20°$. Also ist $W_F = (210\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m})\cos 20° = 590\,\mathrm{J}$.

(b) Die Gravitationskraft ist nach unten, senkrecht zur Verschiebung der Kiste gerichtet. Der Winkel zwischen dieser Kraft und der Verschiebung ist 90°, und es ist $\cos 90° = 0$, also ist die von der Gravitationskraft verrichtete Arbeit null.

(c) Die Normalkraft des Bodens auf die Kiste steht also senkrecht zur Verschiebung, also ist die von dieser Kraft verrichtete Arbeit auch null.

(d) Dies sind die einzigen auf die Kiste wirkenden Kräfte, also ist die insgesamt an der Kiste verrichtete Arbeit 590 J.

Mit Hilfe eines Seils hebt ein Helikopter eine Astronautin mit einer Masse von 72 kg in senkrechter Richtung 15 m hoch aus dem Meer. Die Beschleunigung der Astronautin ist dabei g/10. Wie groß ist die Arbeit, die durch (a) die Kraft des Helikopters und (b) die Gravitationskraft an der Astronautin verrichtet wird? Wie groß sind (c) die kinetische Energie und (d) der Geschwindigkeitsbetrag der Astronautin, kurz bevor sie den Helikopter erreicht?

(a) $\vec{F}$ bezeichne die nach oben gerichtete Kraft, die durch das Seil auf die Astronautin ausgeübt wird. Die Kraft des Seils ist nach oben gerichtet und die Gravitationskraft mg nach unten. Weiter beträgt die Beschleunigung der Astronautin $g/10$ nach oben. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt $F - mg = mg/10$, also $F = 11mg/10$. Da die Kraft $\vec{F}$ und die Verschiebung $\vec{d}$ in die gleiche Richtung weisen, beträgt die durch $\vec{F}$ verrichtete Arbeit

$$W_F = Fd = \frac{11mgd}{10} = \frac{11(72\,\mathrm{kg})\left(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\right)(15\,\mathrm{m})}{10} = 1{,}164 \times 10^4\,\mathrm{J}\,.$$

(b) Die Gravitationskraft hat den Betrag mg und ist der Verschiebung entgegengerichtet. Also ist unter Verwendung von Gl. 7-7 die von der Gravitationskraft verrichtete Arbeit

$$W_g = -mgd = -(72\,\mathrm{kg})\left(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\right)(15\,\mathrm{m}) = -1{,}058 \times 10^4\,\mathrm{J}\,.$$

(c) Die Gesamtarbeit, die verrichtet wird, ist $W = 1{,}164 \times 10^4\,\mathrm{J} - 1{,}058 \times 10^4\,\mathrm{J} = 1{,}06 \times 10^3\,\mathrm{J}$. Da die Astronautin aus der Ruhelage startet, sagt uns der Energieerhaltungssatz, dass dies ihre kinetische Energie am Ende sein muss.

(d) Wegen $K = \frac{1}{2}mv^2$ ist die Endgeschwindigkeit der Astronautin gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}06 \times 10^3\,\mathrm{J})}{72\,\mathrm{kg}}} = 5{,}4\,\mathrm{m/s}\,.$$

Ein Proton bewegt sich entlang einer x-Achse gemaß der Gleichung $x = 50t + 10t^2$, wobei x in Metern und t in Sekunden gemessen wird. Berechnen Sie (a) die Durchschnittsgeschwindigkeit des Protons wahrend der ersten 3,0 s seiner Bewegung, (b) die Momentangeschwindigkeit des Protons zur Zeit t = 3,0 s und (c) die Momentanbeschleunigung des Protons bei t = 3,0 s. (d) Zeichnen Sie x als Funktion von t und erläutern Sie, wie die Antwort auf die Frage (a) aus der Kurve ermittelt werden kann. (e) Geben Sie die Antwort auf Frage (b) auf der Kurve an. (f) Zeichnen Sie v als Funktion von t und geben Sie auf der Kurve die Antwort auf Frage (c) an.

In dieser Lösung verwenden wir die Bezeichnung $x(t)$ für den Wert von x zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Also ist $x(t) = 50t + 10t^2$ mit gedachten SI-Einheiten (Meter und Sekunden).

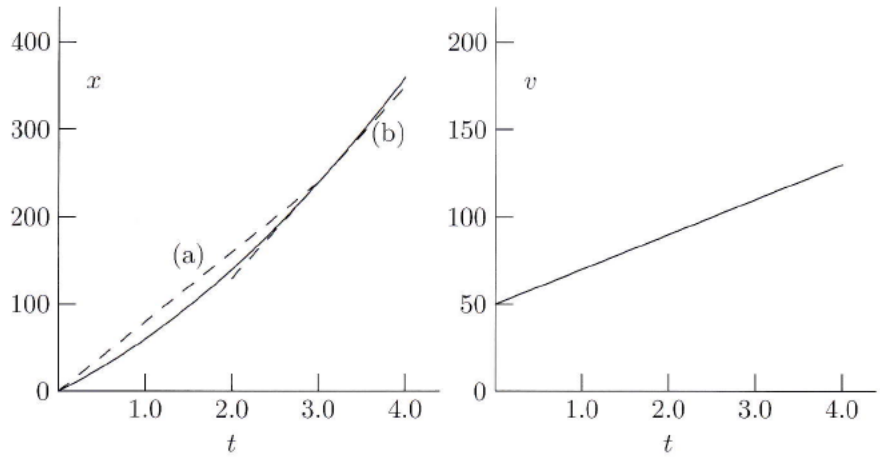
(a) Die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 3 s ist gegeben durch

$$v_{\text{gem}} = \frac{x(3) - x(0)}{\Delta t} = \frac{(50)(3) + (10)(3)^2 - 0}{3} = 80\ \text{m/s}\,.$$

(b) Die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t ist gegeben durch $v = dx/dt = 50 + 20t$ in SI-Einheiten. Bei $t = 3{,}0$ s ist $v = 50 + (20)(3{,}0) = 110$ m/s.

(c) Die Momentanbeschleunigung zur Zeit t ist gegeben durch $a = dv/dt = 20\ \text{m/s}^2$. Sie ist konstant, also ist die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt $20\ \text{m/s}^2$.

(d) und (e) Die untenstehenden Graphen zeigen die Koordinate x und die Geschwindigkeit v als Funktionen der Zeit, natürlich in SI-Einheiten. Die punktierte, mit (a) gekennzeichnete Linie im ersten Graphen verläuft von $t = 0, x = 0$ nach $t = 3{,}0$ s, $x = 240$ m. Ihre Steigung ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 3 s der Bewegung. Die gepunktete, mit (b) gekennzeichnete Linie verläuft tangential zur x-Kurve bei $t = 3{,}0$ s. Ihre Steigung ist die Momentangeschwindigkeit bei $t = 3{,}0$ s.



Die Bremsen Ihres Autos liefern eine maximale Verzögerung von $5{,}2\ \text{m/s}^2$. (a) Sie fahren mit 137 km/h und erblicken plötzlich eine Radarfalle. Wie lang brauchen Sie mindestens, um Ihren Wagen unter die maximal erlaubte Geschwindigkeit von 90 km/h zu bringen? (Die Antwort macht deutlich, wie sinnlos es ist, zu bremsen in der Hoffnung, dass die überhöhte Geschwindigkeit von der Radarfalle unbemerkt bleibt.) (b) Tragen Sie fur eine solche Verzögerung x in Abhängigkeit von t und v in Abhängigkeit von t auf.

Als positive Richtung wählen wir die Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit des Autos (wobei wir voraussetzen, dass $a < 0$ ist, da das Auto abgebremst wird). Wir nehmen an, dass die Beschleunigung konstant ist, und verwenden Tabelle 2-1.

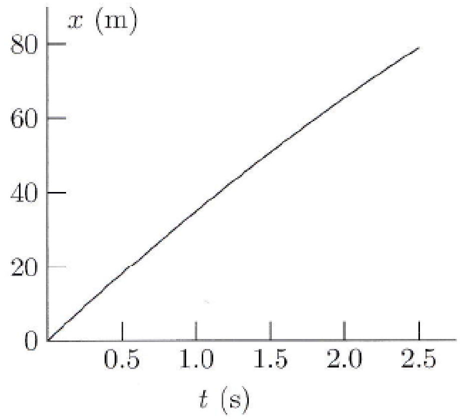
(a) Setzen wir $v_0 = 137\,\text{km/h} = 38{,}1\,\text{m/s}$, $v = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$ und $a = -5{,}2\,\text{m/s}^2$ in $v = v_0 + at$ ein, erhalten wir

$$t = \frac{25\,\text{m/s} - 38\,\text{m/s}}{-5{,}2\,\text{m/s}^2} = 2{,}5\,\text{s}\,.$$

(b) Wir nehmen an, dass sich das Auto bei $x = 0$ befindet, wenn die Bremsen (zum Zeitpunkt $t = 0$) betätigt werden. Also ist der Ort des Autos als Funktion der Zeit gegeben durch

$$x = (38)t + \frac{1}{2}(-5{,}2)t^2$$

in SI-Einheiten. Diese Funktion wird von $t = 0$ bis $t = 2{,}5\,\text{s}$ im Graphen rechts aufgetragen. Der Graph für v als Funktion von t ist hier nicht wiedergegeben; dies ist eine abfallende gerade Linie von v_0 bis v.



Eine Murmel mit einer Masse von 5,0 g wird anhand eines von einer Feder getriebenen Spielzeuggewehrs senkrecht nach oben geschossen, wobei sich das Ziel 20 m über der ursprünglichen Position der Murmel auf der zusammengedrückten Feder befindet. Damit die Murmel ihr Ziel gerade erreicht, muss die Feder um 8,0 cm gestaucht werden. (a) Wie lautet die Änderung U_g der potenziellen Energie des Systems Murmel-Erde wahrend des 20 m langen Anstiegs der Murmel? (b) Wie lautet die Änderung U_F der elastischen potenziellen Energie der Feder, während die Murmel abgeschossen wird? (c) Wie groß ist die Federkonstante der Feder?

Setzen Sie die potenzielle Energie des Systems Murmel–Erde im Gravitationsfeld null, wenn sich die Murmel an der Stelle befindet, wo die Feder zusammengedrückt ist. Wenn die Murmel den höchsten Punkt ihrer Flugbahn erreicht hat, ist ihre potenzielle Energie

(a) $U_g = mgh$, wobei h die Höhe des höchsten Punktes bezeichnet. Diese ist $h = 20\,\text{m}$. Also ist

$$U_g = \left(5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg}\right)\left(9{,}8\,\text{m/s}^2\right)(20\,\text{m}) = 0{,}98\,\text{J}\,.$$

(b) Bevor sie abgeschossen wird, befindet sich die Murmel in Ruhe, und sie ist auch am höchsten Punkt ihrer Flugbahn in Ruhe. Beide Kräfte, sowohl die Federkraft als auch die Gravitationskraft, die als einzige Kräfte wirken, sind konservativ. Die Energieerhaltung wird ausgedrückt durch $\Delta U_g + \Delta U_s = 0$, wobei ΔU_s die potenzielle Energie der Feder bezeichnen. Dies bedeutet $\Delta U_s = -\Delta U_g = -0{,}98\,\text{J}$.

(c) Setzen Sie die potenzielle Energie der Feder null, wenn sie entspannt ist. Dann ist ihre potenzielle Energie am Anfang $U_s = 0{,}98\,\text{J}$. Dies muss $\frac{1}{2}kx^2$ sein, wobei k die Federkonstante ist und x die Strecke bezeichnet, um die sie zusammengedrückt wurde. Lösen Sie nach k auf:

$$k = \frac{2U_s}{x^2} = \frac{2(0{,}98\,\text{J})}{(0{,}080\,\text{m})^2} = 3{,}1 \times 10^2\,\text{N/m} = 3{,}1\,\text{N/cm}\,.$$